



Elektrodynamik

Eine Einführung

4., aktualisierte Auflage

David J. Griffiths

 Pearson

EXTRAS
ONLINE

Elektrodynamik

Eine Einführung

4., aktualisierte Auflage

David J. Griffiths

Überarbeitung und Fachlektorat der vierten Auflage
Professor Dr. Ulrich Schollwöck, LMU München

- a. Beide Platten eines planparallelen Kondensators sind geerdet, und eine Punktladung q wird in der Entfernung x von Platte 1 zwischen sie gebracht. Der Abstand der Platten ist d . Bestimmen Sie die induzierte Ladung auf jeder Platte.

[Antwort: $Q_1 = q(x/d - 1)$; $Q_2 = -qx/d$]

- b. Zwei konzentrische leitende Kugelschalen (mit Radien a und b) sind geerdet, und eine Punktladung q wird beim Radius r zwischen sie gebracht. Bestimmen Sie die auf jeder Kugelschale induzierte Ladung.

Aufgabe 3.52

- a. Zeigen Sie, dass der Quadrupol-Term der Multipolentwicklung folgendermaßen formuliert werden kann:

$$V_{\text{Quadrupol}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i,j=1}^3 \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}$$

(in der Schreibweise von Gleichung (1.31)) mit

$$Q_{ij} \equiv \frac{1}{2} \int \left[3r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij} \right] \rho(\mathbf{r}') d\tau'.$$

Hierbei ist

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

das **Kronecker-Delta**, und Q_{ij} ist das Quadrupolmoment der Ladungsverteilung. Beachten Sie die Hierarchie:

$$V_{\text{Monopol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}; \quad V_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \hat{r}_i p_i}{r^2};$$

$$V_{\text{Quadrupol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}}{r^3}; \quad \dots$$

Das Monopolmoment (Q) ist ein Skalar, das Dipolmoment (\mathbf{p}) ist ein Vektor, das Quadrupolmoment (Q_{ij}) ist ein Tensor zweiter Stufe usw.

- b. Bestimmen Sie alle neun Komponenten von Q_{ij} für die in Abbildung 3.30 dargestellte Konfiguration (dabei soll das Quadrat die Seitenlänge a haben und sich so in der x - y -Ebene befinden, dass sein Mittelpunkt im Ursprung liegt.)
- c. Zeigen Sie, dass das Quadrupolmoment von der Position des Ursprungs unabhängig ist, wenn sowohl das Monopol- als auch das Dipolmoment verschwinden. (Dies gilt für alle Stufen der Hierarchie – das niedrigste von null verschiedene Moment ist immer vom Ursprung unabhängig.)
- d. Wie würden Sie das **Oktopolmoment** definieren? Drücken Sie den Oktopol-Term der Multipolentwicklung durch das Oktopolmoment aus.

Aufgabe 3.53

In Beispiel 3.8 haben wir das elektrische Feld außerhalb eines kugelförmigen Leiters (mit Radius R) bestimmt, der sich in einem gleichförmigen äußeren Feld \mathbf{E}_0 befindet. Lösen Sie das Problem mithilfe der Methode der Spiegelladungen und überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis mit Gleichung 3.76 übereinstimmt.

[*Hinweis:* Gehen Sie wie in Beispiel 3.2 vor, setzen Sie aber die Ladung $-q$ diametral gegenüber q . Lassen Sie $a \rightarrow \infty$ gehen und halten Sie $(1/4\pi\epsilon_0)(2q/a^2) = -E_0$ konstant.]

! Aufgabe 3.54

Nehmen Sie an, dass für die unendliche rechteckige Röhre in Beispiel 3.4 das Potential am Boden ($y = 0$) und den beiden Seiten ($x = \pm b$) null ist. Das Potential auf der Oberseite ($y = a$) ist eine von null verschiedene Konstante V_0 . Bestimmen Sie das Potential innerhalb der Röhre.

[*Anmerkung:* Dies ist eine Umkehrung von Aufgabe 3.15b. Gehen Sie von einem Ansatz wie in Beispiel 3.4 aus und verwenden Sie sinusförmige Funktionen für y und hyperbolische für x . Es handelt sich um einen unüblichen Fall, in dem $k = 0$ enthalten sein muss. Bestimmen Sie zuerst die allgemeine Lösung für Gleichung 3.26 mit $k = 0$.²⁵]

[*Antwort:*

$$V_0 \left(\frac{y}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh(n\pi x/a)}{n \cosh(n\pi b/a)} \sin(n\pi y/a) \right).$$

Alternativ erhalten Sie mit sinusförmigen Funktionen in x und hyperbolischen Funktionen in y

$$-\frac{2V_0}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh(\alpha_n y)}{\alpha_n \sinh(\alpha_n a)} \cos(\alpha_n x) \quad \text{mit} \quad \alpha_n \equiv (2n-1)\pi/2b.]$$

! Aufgabe 3.55

a. Eine lange Metallröhre mit quadratischem Querschnitt (und Seitenlänge a) wird auf drei Seiten geerdet, während die vierte (die vom Rest isoliert ist) auf einem konstanten Potential V_0 gehalten wird. Bestimmen Sie die Nettoladung pro Einheitslänge auf der Seite, die V_0 gegenüberliegt.

[*Hinweis:* Benutzen Sie Ihr Resultat aus Aufgabe 3.15 oder 3.54.]

b. Eine lange Metallröhre mit kreisförmigem Querschnitt (und Radius R) ist (der Länge nach) in vier gleiche Abschnitte untergliedert. Drei von ihnen sind geerdet, der vierte wird auf dem konstanten Potential V_0 gehalten. Bestimmen Sie die Nettoladung pro Einheitslänge auf dem Abschnitt, der V_0 gegenüberliegt.

[*Antwort* für (a) und (b): $\lambda = -(\epsilon_0 V_0/\pi) \ln 2$]²⁶

²⁵ Eine weitergehende Diskussion finden Sie in S. Hassani, *Am. J. Phys.* **59**, 470 (1991).

²⁶ Hierbei handelt es sich um Spezialfälle des **Thomson-Lampard-Satzes**; siehe J. D. Jackson, *Am. J. Phys.* **67**, 107 (1999).

Aufgabe 3.56

Ein idealer elektrischer Dipol befindet sich im Ursprung und zeigt, wie in Abbildung 3.36, in z-Richtung. Eine elektrische Ladung befindet sich anfänglich in einem Punkt der x-y-Ebene in Ruhe. Zeigen Sie, dass der Dipol auf einem halbkreisförmigen Bogen vor und zurück schwingt, als ob er sich auf einem Pendel befinden würde, das im Ursprung aufgehängt ist.

[Dieses nette Resultat finden Sie bei R. S. Jones, *Am. J. Phys.* **63**, 1042 (1995).]

Aufgabe 3.57

Ein stationärer elektrischer Dipol $\mathbf{p} = p\hat{z}$ befinde sich am Ursprung. Eine positive Punktladung q (Masse m) führt im Feld des Dipols eine Kreisbewegung mit Radius s bei konstanter Geschwindigkeit aus. Beschreiben Sie die Bahnebene. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, den Drehimpuls und die Gesamtenergie der Ladung.²⁷

[Antwort: $L = \sqrt{qpm/3\sqrt{3}\pi\epsilon_0}$.]

Aufgabe 3.58

Bestimmen Sie die Ladungsdichte $\sigma(\theta)$ auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R , die für Punkte außerhalb der Kugel das gleiche elektrische Feld hervorruft wie eine Ladung q beim Punkt $a < R$ auf der z-Achse.

[Antwort: $\frac{q}{4\pi R}(R^2 - a^2)(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{-3/2}$]

²⁷ G. P. Sastry, V. Srinivas und A. V. Madhav, *Eur. J. Phys.* **17**, 275 (1996).

Elektrische Felder in Materie

4

4.1	Polarisation	220
4.2	Das Feld eines polarisierten Objekts	227
4.3	Die dielektrische Verschiebung	236
4.4	Lineare Dielektrika	241

ÜBERBLICK

4.1 Polarisation

4.1.1 Dielektrika

In diesem Kapitel werden wir uns mit elektrischen Feldern in Materie befassen. Materie gibt es selbstverständlich in vielen verschiedenen Variationen – Festkörper, Flüssigkeiten, Gase, Metalle, Holz, Gläser usw. –, und alle diese Substanzen reagieren in unterschiedlicher Weise auf elektrostatische Felder. Dennoch gehören die meisten Objekte des Alltags (zumindest in guter Näherung) einer von zwei Klassen an: **Leiter** und **Isolatoren** (bzw. **Dielektrika**). Leiter haben wir bereits behandelt. Es sind Substanzen mit einem „unbegrenzten“ Vorrat an Ladungsträgern, die frei in der Substanz herumwandern können. In der Praxis bedeutet das üblicherweise, dass viele der Elektronen (in einem typischen Metall ein oder zwei pro Atom) nicht an irgendeinen Atomkern gebunden sind, sondern sich frei bewegen können. In Dielektrika sind dagegen *alle Ladungen an bestimmte Atome oder Moleküle gebunden*. Sie werden sozusagen an der kurzen Leine gehalten und können sich nur *innerhalb* des Atoms oder Molekül geringfügig bewegen. Solche mikroskopischen Verschiebungen haben nicht so drastische Auswirkungen wie die vollständige Neuordnung von Ladungen in einem Leiter. Der Gesamteffekt aller Bewegungen bestimmt aber das charakteristische Verhalten dielektrischer Materialien. Im Grunde genommen gibt es zwei wichtige Wege, durch die elektrische Felder die Ladungsverteilung eines dielektrischen Atoms oder Moleküls verzerren können: *Dehnung* und *Rotation*. In den beiden folgenden Abschnitten werde ich diese Prozesse diskutieren.

4.1.2 Induzierte Dipole

Was geschieht mit einem neutralen Atom, das in ein elektrisches Feld \mathbf{E} gebracht wird? Vermutlich denken Sie zunächst: „Gar nichts – da das Atom nicht geladen ist, hat das Feld keine Auswirkungen auf das Atom.“ Das stimmt aber nicht. Obwohl das Atom als Ganzes elektrisch neutral ist, besteht es *doch* aus einem positiv geladenen Zentrum (dem Kern), der von einer negativ geladenen Elektronenwolke umgeben ist. Diese beiden geladenen Gebiete innerhalb des Kerns werden durchaus vom Feld beeinflusst: Der Kern wird in Richtung des Felds verschoben, die Elektronen in entgegengesetzter Richtung. Wenn das Feld stark genug ist, kann es das Atom im Prinzip auseinanderreißen und so „ionisieren“ (die Substanz wird dann zu einem Leiter.) Bei schwächeren Feldern wird jedoch bald ein Gleichgewicht erreicht, denn sobald das Zentrum der Elektronenwolke nicht mehr im Kern liegt, entsteht eine Anziehungskraft zwischen diesen positiven und negativen Ladungen, die das Atom zusammenhalten. Die beiden entgegengesetzten Kräfte – das Feld \mathbf{E} , welches Elektronen und Kern auseinanderzieht, und ihre gegenseitige Anziehungskraft, die sie zusammenhält – gleichen sich aus und hinterlassen ein **polarisiertes** Atom, bei dem die positive Ladung geringfügig gegenüber der negativen verschoben ist. Das Atom weist nun ein winziges Dipolmoment \mathbf{p} auf, das in *dieselbe Richtung* weist wie \mathbf{E} . Üblicherweise ist dieses induzierte Dipolmoment ungefähr dem Feld proportional (sofern letzteres nicht zu stark ist):

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} . \quad (4.1)$$

Tabelle 4.1: Atomare Polarisierbarkeit ($\alpha/4\pi\epsilon_0$ in Einheiten von 10^{-30}m^3). Quelle: Handbook of Chemistry and Physics, 91st ed. (Boca Raton: CRC-Press, Inc. 2010)

H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K	Cs
0,667	0,205	24,3	5,60	1,76	0,396	24,1	1,64	43,4	59,4

Die Proportionalitätskonstante wird als **atomare Polarisierbarkeit** bezeichnet. Ihr Wert hängt von der genauen Struktur des betrachteten Atoms ab. In Tabelle 4.1 sind einige experimentell bestimmte atomare Polarisierbarkeiten aufgelistet.

Beispiel 4.1: Atomare Polarisierbarkeit

Nach einem einfachen Modell besteht ein Atom aus einem punktförmigen Kern ($+q$), umgeben von einer gleichmäßig geladenen kugelförmigen Wolke ($-q$) mit Radius a (Abbildung 4.1). Berechnen Sie die atomare Polarisierbarkeit eines solchen Atoms.

Lösung:

In Anwesenheit eines äußeren Felds \mathbf{E} wird der Kern, wie in Abbildung 4.2 dargestellt, geringfügig nach rechts verschoben, die Elektronenwolke hingegen nach links. (Weil die tatsächlichen Verschiebungen, wie Sie in Aufgabe 4.1 noch feststellen werden, extrem klein sind, dürfen wir annehmen, dass die Elektronenwolke ihre Kugelform beibehält.) Nehmen wir an, das Gleichgewicht wird erreicht, sobald der Kern gegenüber dem Kugelmittelpunkt um den Abstand d verschoben ist. An diesem Punkt gleicht das äußere Feld, das den Kern nach rechts verschiebt, genau das innere Feld aus, das ihn nach links verschiebt: $E = E_e$. Dabei ist E_e das von der Elektronenwolke hervorgerufene Feld. Nun beträgt das Feld in der Entfernung d vom Mittelpunkt einer gleichmäßig geladenen Kugel (gemäß Aufgabe 2.12)

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3}.$$

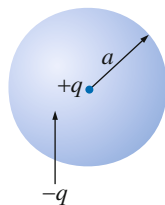


Abbildung 4.1

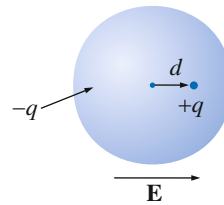


Abbildung 4.2

Im Gleichgewicht ist daher:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3}, \quad \text{oder} \quad p = qd = (4\pi\epsilon_0 a^3) E.$$

Beispiel 4.1 (Fortsetzung)

Die atomare Polarisierbarkeit ist somit

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0\alpha^3 = 3\epsilon_0\nu, \quad (4.2)$$

wobei ν das Volumen des Atoms darstellt. Obwohl dieses Atommodell ziemlich grob ist, ist das Ergebnis (Gleichung 4.2) gar nicht so schlecht – für viele einfache Atome ist es bis auf einen Faktor von etwa vier genau.

Bei Molekülen ist die Situation nicht ganz so einfach, weil sie sich oft in manche Richtungen einfacher polarisieren lassen als in andere. Kohlendioxid (Abbildung 4.3) hat beispielsweise eine Polarisierbarkeit von $4,5 \cdot 10^{-40} \text{C}^2 \text{m/N}$, sofern das Feld in Richtung der Molekülachse liegt, aber nur $2 \cdot 10^{-40} \text{C}^2 \text{m/N}$ bei Feldern senkrecht dazu. Steht das Feld in irgendeinem *Winkel* zur Achse, müssen Sie es in eine parallele und eine senkrechte Komponente aufteilen und jede mit der entsprechenden Polarisierbarkeit multiplizieren:

$$\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}.$$

In diesem Fall muss das induzierte Dipolmoment nicht einmal in derselben *Richtung* wie \mathbf{E} verlaufen. Darüber hinaus ist CO_2 für ein Molekül relativ einfach gebaut, da sich die Atome in einer geraden Linie anordnen. Bei einem völlig asymmetrischen Molekül wird Gleichung 4.1 durch die allgemeingültigste Beziehung zwischen \mathbf{E} und \mathbf{p} ersetzt:

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned} \quad (4.3)$$

Diese Gruppe der neun Konstanten α_{ij} bildet den **Polarisationstensor** des Moleküls. Ihre tatsächlichen Werte hängen nur von der Orientierung der von Ihnen gewählten Achsen ab. Allerdings ist es immer möglich, „Haupt“achsen so zu wählen, dass alle Terme abseits der Diagonalen (α_{xy} , α_{zx} , usw.) verschwinden, sodass nur noch drei von null verschiedene Polarisierbarkeiten übrig bleiben, nämlich α_{xx} , α_{yy} , und α_{zz} .

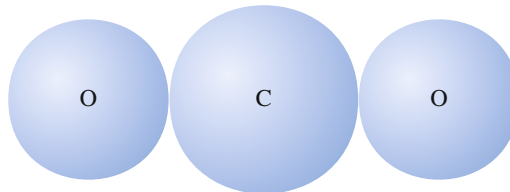


Abbildung 4.3

■ Aufgabe 4.1

Ein Wasserstoffatom (dessen Bohr'scher Radius etwa ein halbes Angström beträgt), befindet sich zwischen zwei Metallplatten, deren Abstand 1 mm beträgt und die mit den Klemmen einer 500-V-Batterie verbunden sind. Welchem Anteil des Atomradius entspricht in etwa der Betrag der Verschiebung d ? Bestimmen Sie die Spannung, die bei dieser Anordnung notwendig wäre, um das Atom zu ionisieren.

[Benutzen Sie die α -Werte aus Tabelle 4.1. *Moral*: Selbst auf atomarer Ebene betrachten wir hier nur *winzigste* Verschiebungen.]

■ Aufgabe 4.2

Gemäß der Quantenmechanik besitzt die Elektronenwolke eines Wasserstoffatoms im Grundzustand die Ladungsdichte

$$\rho(r) = \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a}.$$

Hierbei ist q die Elektronenladung, und a ist der Bohr'sche Radius. Bestimmen Sie die atomare Polarisierbarkeit dieses Atoms.

[*Hinweis*: Bestimmen Sie zuerst das elektrische Feld $E_e(r)$ der Elektronenwolke und entwickeln Sie danach den Exponentialterm unter der Annahme $r \ll a$. Einen anspruchsvolleren Ansatz enthält W. A. Bowers, *Am. J. Phys.* **54**, 347 (1986).]

■ Aufgabe 4.3

Nach Gleichung 4.1 ist das induzierte Dipolmoment eines Atoms proportional zum äußeren Feld. Dies ist allerdings nur „Pi mal Daumen“ und keineswegs ein grundlegendes Gesetz. Zumindest theoretisch lassen sich einfach Ausnahmen konstruieren. Nehmen Sie beispielsweise an, die Ladungsdichte der Elektronenwolke wäre bis zu einem Radius R proportional zur Entfernung vom Zentrum. Zu welcher Potenz von E wäre p in diesem Fall proportional? Bestimmen Sie die Bedingung für $\rho(r)$, damit Gleichung 4.1 auch im Grenzfall schwacher Felder gilt.

■ Aufgabe 4.4

Eine Punktladung q befindet sich in großer Entfernung r von einem neutralen Atom mit Polarisierbarkeit α . Bestimmen Sie die zwischen ihnen herrschende Anziehungskraft.

4.1.3 Ausrichtung polarer Moleküle

Das in Abschnitt 4.1.2 diskutierte neutrale Atom hat zu Beginn kein Dipolmoment – \mathbf{p} wurde durch das angelegte Feld *induziert*. Einige Moleküle besitzen jedoch von vornherein ein permanentes Dipolmoment. Im Wassermolekül tendieren die Elektronen beispielsweise dazu, sich um das Sauerstoffatom anzusammeln (Abbildung 4.4).

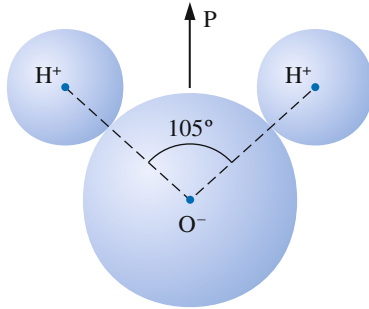


Abbildung 4.4

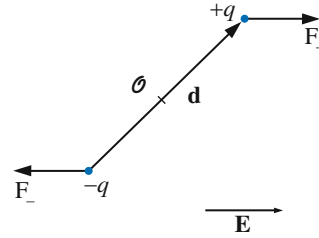


Abbildung 4.5

Da das Molekül einen Winkel von 105° aufweist, verursacht dies eine negative Ladung am Knickpunkt und eine positive Nettoladung am entgegengesetzten Ende. (Das Dipolmoment von Wasser ist ungewöhnlich groß und beträgt $6,1 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$. Darauf beruht übrigens seine hohe Effizienz als Lösungsmittel.) Was geschieht, wenn derartige Moleküle (man bezeichnet sie als **polare Moleküle**) in ein elektrisches Feld gebracht werden?

Ist das Feld gleichmäßig, dann gleicht die Kraft $\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}$ auf das positive Ende genau die Kraft $\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}$ auf das negative Ende aus (Abbildung 4.5). Allerdings entsteht ein *Drehmoment*:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) \\ &= [(\mathbf{d}/2) \times (q\mathbf{E})] + [(-\mathbf{d}/2) \times (-q\mathbf{E})] \\ &= q\mathbf{d} \times \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Daher erfährt ein Dipol $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ in einem gleichförmigen Feld \mathbf{E} das Drehmoment

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (4.4)$$

Beachten Sie, dass \mathbf{N} so ausgerichtet ist, dass \mathbf{p} *parallel* zu \mathbf{E} ausgerichtet wird. Ein polares Molekül, das frei rotieren kann, dreht sich solange, bis es in Richtung des angelegten Felds weist.

Ist das Feld *nicht* gleichförmig, sodass \mathbf{F}_+ die Kraft \mathbf{F}_- nicht genau ausgleicht, wirkt neben dem Drehmoment auch noch eine *Nettokraft* auf den Dipol. Natürlich muss sich \mathbf{E} ganz plötzlich ändern, damit eine signifikante Veränderung über den Raum eines Moleküls auftritt, daher ist das üblicherweise kein Thema bei der Diskussion von Dielektrika. Dennoch ist die Formel der Kraft auf einen Dipol in einem ungleichförmigen Feld interessant:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = q(\Delta\mathbf{E}).$$

Hierin steht $\Delta\mathbf{E}$ für den Unterschied des Felds am positiven und am negativen Ende. Unter der Annahme, dass der Dipol besonders kurz ist, können wir die kleine Änderung in E_x mithilfe von Gleichung 1.35 abschätzen, wobei gleichartige Formeln für E_y und E_z gelten:

$$\Delta E_x \equiv (\nabla E_x) \cdot \mathbf{d}.$$

Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwort- und DRM-Schutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: **info@pearson.de**

Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten oder ein Zugangscode zu einer eLearning Plattform bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.** Zugangscodes können Sie darüberhinaus auf unserer Website käuflich erwerben.

Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

<https://www.pearson-studium.de>