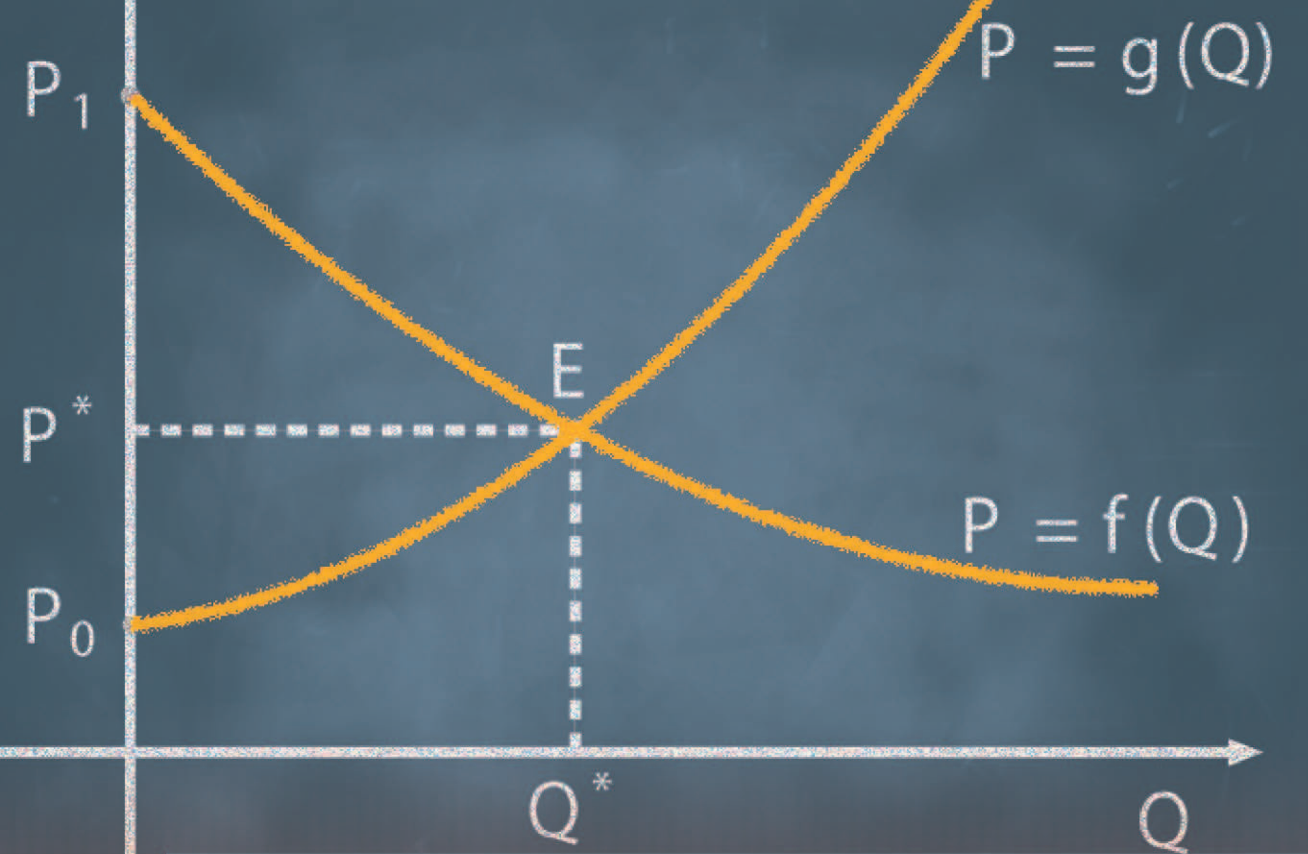

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Basiswissen mit Praxisbezug

4., aktualisierte und erweiterte Auflage

Knut Sydsæter
Peter Hammond
mit Arne Strøm

Inklusive

MyMathLab Deutsche Version

E-Learning und E-Text für Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

- Integrierter E-Text des Lehrbuchs
- Optimale und effiziente Prüfungsvorbereitung mit über 1500 interaktiven Übungsaufgaben, Tutorien und Prüfungssimulationen

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Basiswissen mit Praxisbezug

4., aktualisierte und erweiterte Auflage

Knut Sydsæter
Peter Hammond
mit Arne Strøm

Übersetzt und fachlektoriert durch

Dr. Fred Böker
Professor für Statistik und Ökonometrie
an der Georg-August-Universität Göttingen

ALWAYS LEARNING PEARSON

Wenn wir in Formel (3) $n = 1$ setzen, erhalten wir

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(c)x^2 \qquad \text{für ein } c \text{ zwischen } 0 \text{ und } x \tag{4}$$

Diese Formel sagt uns, dass $\frac{1}{2}f''(c)x^2$ der Fehler ist, der sich ergibt, wenn wir $f(x)$ durch die zugehörige lineare Approximation um $x = 0$ ersetzen.

Wie benutzen wir die Restglied-Formel? Sie ermöglicht die Abschätzung einer oberen Grenze für den resultierenden Fehler, wenn wir f durch das n-te Taylor-Polynom ersetzen. Nehmen Sie z. B. an, dass für alle x in einem Intervall I der Absolutbetrag von $f^{(n+1)}(x)$ höchstens M ist. Dann können wir schließen, dass in diesem Intervall

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1} \tag{5}$$

Beachten Sie, dass für große n und x nahe bei 0 das Restglied $|R_{n+1}(x)|$ aus zwei Gründen klein ist: Erstens, wenn n groß ist, dann ist die Zahl $(n+1)!$ im Nenner in (5) groß und zweitens, wenn $|x|$ kleiner ist als 1, dann ist $|x|^{n+1}$ auch klein, wenn n groß ist.

Beispiel 1

Bestimmen Sie die Taylor-Formel für

$$f(x) = \sqrt{25 + x} = (25 + x)^{1/2}$$

mit $n = 1$ und verwenden Sie diese für eine Abschätzung von $\sqrt{25.01}$.

Lösung: Wir verwenden Formel (4). Hier ist $f(0) = 5$ und

$$f'(x) = \frac{1}{2}(25 + x)^{-1/2}, \qquad f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(25 + x)^{-3/2}$$

Daher ist $f'(0) = 1/2 \cdot 1/5 = 1/10$ und $f''(c) = -(1/4)(25 + c)^{-3/2}$. Somit folgt für ein c zwischen 0 und x

$$\sqrt{25 + x} = 5 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)(25 + c)^{-3/2}x^2 = 5 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{8}(25 + c)^{-3/2}x^2 \tag{$*$}$$

Um $\sqrt{25.01}$ abzuschätzen, schreiben wir $25.01 = 25 + 0.01$ und benutzen dann ($*$). Wenn $x = 0.01$, dann liegt c zwischen 0 und 0.01 und somit ist $25 + c > 25$. Dann ist $(25 + c)^{-3/2} < (25)^{-3/2} = 1/125$, so dass der Absolutbetrag des Restgliedes gleich

$$|R_2(0.01)| = \left|\frac{-1}{8}(25 + c)^{-3/2}\left(\frac{1}{100}\right)^2\right| \leq \frac{1}{80\,000} \cdot \frac{1}{125} = 10^{-7}$$

ist. Wir schließen, dass $\sqrt{25.01} \approx 5 + 1/10 \cdot 1/100 = 5.001$ ist mit einem Fehler, der kleiner als 10^{-7} ist.

Beispiel 2

Bestimmen Sie die Taylor-Formel für $f(x) = e^x$ und schätzen Sie das Restglied für $n = 3$ und $x = 0.1$ ab.

Lösung: Aus Beispiel 4 im vorigen Unterkapitel folgt, dass es eine Zahl c zwischen 0 und x gibt, so dass

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c \tag{6}$$

Man kann beweisen, dass für jede feste Zahl x der Fehlerterm in (6) gegen 0 strebt, wenn n gegen ∞ strebt. Mit Hilfe von (6) kann daher der Wert von e^x für jedes x mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden. Wenn jedoch $|x|$ groß ist, sind eine große Anzahl von Termen nötig, um einen hohen Grad an Genauigkeit zu erhalten, weil das Restglied nur sehr langsam gegen 0 geht, wenn n gegen ∞ geht.

Für $n = 3$ und $x = 0.1$ erhalten wir für ein c im Intervall $(0, 0.1)$

$$e^{0.1} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} + \frac{(0.1)^4}{24}e^c \tag{$*$}$$

Für $c < 0.1$ haben wir $e^c < e^{0.1}$. Wir behaupten, dass $e^{0.1} < 1.2$. Um dies zu beweisen, beachten Sie, dass $(1.2)^{10} \approx 6.2$, so dass $e < (1.2)^{10}$ und damit $e^{0.1} < ((1.2)^{10})^{0.1} = 1.2$. Daher ist

$$\left|R_4\left(\frac{1}{10}\right)\right| = \frac{(0.1)^4}{24}e^c < \frac{1}{240\,000}1.2 = 0.000\,005 = 5 \cdot 10^{-6}$$

Der Fehler, der entsteht, wenn man das Restglied weglässt, ist daher kleiner als $5 \cdot 10^{-6}$.

Anmerkung Wenn wir die Taylor-Formel auf einem Intervall um $x = x_0$ anstelle $x = 0$ betrachten, ist das Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1} \qquad (c \text{ zwischen } x \text{ und } x_0) \tag{7}$$

Dieser Term muss zur rechten Seite von (4) im vorigen Unterkapitel hinzugefügt werden, um Gleichheit zu erreichen.

Es ist leicht zu zeigen, dass (7) aus (1) und (2) folgt, indem man die Funktion g betrachtet, die durch $g(t) = f(x_0 + t)$ definiert ist, wenn t nahe bei 0 ist.

Aufgaben für Kapitel 7.6

1. Schreiben Sie die Taylor-Formel (3) mit $n = 2$ für $f(x) = \ln(1 + x)$ auf.

2. Verwenden Sie die Approximation

$$(1 + x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2$$

zur Bestimmung von

(a) $\sqrt[3]{25}$ (b) $\sqrt[5]{33}$

(*Hinweis:* Beachten Sie, dass $\sqrt[3]{25} = 3(1 - 2/27)^{1/3}$ ist.) Überprüfen Sie diese Approximationen unter Verwendung eines Rechners.

➡ Fortsetzung

3. Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{9} = 2\,(1 + 1/8)^{1/3}$ ist. Benutzen Sie Formel (3) (mit $n = 2$), um $\sqrt[3]{9}$ auf drei Dezimalstellen zu berechnen.

4. Gegeben sei

$$g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$$

(a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 2 von $g(x)$ um den Ursprung.

(b) Zeigen Sie, dass für $x \geq 0$, $|R_3(x)| \leq 5x^3/81$.

(c) Bestimmen Sie $\sqrt[3]{1003}$ mit 7 korrekten Dezimalstellen.

▶ Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

7.7 Warum Ökonomen Elastizitäten benutzen

Ökonomen untersuchen häufig, wie die Nachfrage nach einem gewissen Gut auf Preisänderungen reagiert. Wir könnten fragen, um wie viele Einheiten die nachgefragte Menge zurückgeht, wenn der Preis um 1 Euro steigt. Auf diese Weise erhalten wir eine konkrete Zahl, eine gewisse Anzahl von Einheiten. Es gibt jedoch mehrere unzureichende Aspekte, wenn man die Sensitivität der Nachfrage auf Preisänderungen in dieser Weise misst. Zum Beispiel kann der Anstieg des Preises um 1 Euro bei einem Pfund Kaffee als beträchtlich angesehen werden, während der Anstieg des Preises eines Autos um 1 Euro unbedeutend ist.

Dieses Problem ergibt sich, weil die Sensitivität der Nachfrage auf Preisänderungen in den gleichen willkürlichen Einheiten gemessen wird wie diejenigen, die benutzt werden, um die nachgefragte Menge und den Preis zu messen. Diese Schwierigkeiten verschwinden, wenn wir stattdessen relative Änderungen betrachten. Wir fragen, um welchen Prozentsatz sich die nachgefragte Menge ändert, wenn der Preis um 1% steigt. Die Zahl, die wir auf diese Weise erhalten, wird unabhängig von den Einheiten sein, in denen die Mengen und die Preise gemessen werden. Diese Zahl heißt die **Preiselastizität der Nachfrage**, gemessen bei einem gegebenen Preis.

Im Jahre 1960 wurde in einem bestimmten Land die Preiselastizität von Butter auf -1 geschätzt. Dies bedeutet, dass ein Anstieg des Preises um 1% zu einer Verringerung der Nachfrage um 1% führen würde, wenn alle anderen Faktoren, die die Nachfrage beeinflussen, konstant bleiben würden. Die Preiselastizität von Kartoffeln wurde auf -0.2 geschätzt. Wie ist dies zu interpretieren? Was ist Ihrer Meinung nach der Grund dafür, dass der Absolutbetrag dieser Elastizität um so viel kleiner ist als der für Butter?

Nehmen Sie jetzt an, dass die Nachfrage nach einem Gut durch die Funktion

$$x = D(P)$$

des Preises P beschrieben werden kann. Wenn sich der Preis von P auf $P + \Delta P$ ändert, verändert sich auch die nachgefragte Menge x. Die absolute Änderung in x ist $\Delta x = D(P + \Delta P) - D(P)$, und die *relative* (oder proportionale) Änderung ist

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{D(P + \Delta P) - D(P)}{D(P)}$$

Das Verhältnis zwischen der relativen Änderung in der nachgefragten Menge und der relativen Preisänderung ist

$$\frac{\Delta x}{x} \Bigg/ \frac{\Delta P}{P} = \frac{P}{x}\frac{\Delta x}{\Delta P} = \frac{P}{D(P)}\frac{D(P+\Delta P)-D(P)}{\Delta P} \qquad (*)$$

Wenn $\Delta P = P/100$, so dass P um 1 % steigt, dann wird $(*)$ zu $(\Delta x/x)\cdot 100$, welches die prozentuale Änderung in der nachgefragten Menge ist. Wir nennen das Verhältnis in $(*)$ *die durchschnittliche Elastizität von x im Intervall* $[P, P+\Delta P]$. Beachten Sie, dass die in $(*)$ definierte Zahl sowohl von der Preisänderung ΔP als auch vom Preis P abhängt, aber dimensionslos ist. Daher macht es keinen Unterschied, ob die Mengen in Tonnen, Kilogramm oder Pfund oder ob die Preise in Dollar, Pfund oder Euro gemessen werden.

Wir würden die Elastizität von D in P gern so definieren, dass sie nicht von der Größe des Zuwachses in P abhängt. Dies ist möglich, wenn D eine differenzierbare Funktion von P ist. Denn dann ist es nahe liegend, die Elastizität von D bezüglich P als Grenzwert des Verhältnisses in $(*)$ zu definieren, wenn ΔP gegen 0 strebt. Da der Newton-Quotient $[D(P+\Delta P)-D(P)]/\Delta P$ gegen $D'(P)$ strebt, wenn ΔP gegen 0 strebt, erhalten wir:

$$\textit{Die Elastizität von } D(P) \textit{ bezüglich } P \textit{ ist } \frac{P}{D(P)}\frac{dD(P)}{dP} \qquad (**)$$

Gewöhnlich erhalten wir eine gute Approximation der Elastizität, indem wir $\Delta P/P = 1/100 = 1\,\%$ setzen und $P\,\Delta x/(x\,\Delta P)$ berechnen.

Die allgemeine Definition der Elastizität

Die obige Definition der Elastizität betraf eine Funktion, die die nachgefragte Menge als Funktion des Preises bestimmte. Ökonomen betrachten jedoch auch die Einkommenselastizität der Nachfrage, wenn die Nachfrage als Funktion des Einkommens betrachtet wird. Sie betrachten auch Elastizitäten des Angebots, Elastizitäten der Substitution und viele andere Elastizitäten. Es ist daher hilfreich zu sehen, wie die Elastizität für eine allgemeine differenzierbare Funktion definiert werden kann. Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, dann definieren wir die Elastizität von f bezüglich x durch

$$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) \qquad \textbf{(Elastizität}^4 \textbf{ von } f \textbf{ bezüglich } x\textbf{)} \qquad (1)$$

Beispiel 1

Bestimmen Sie die Elastizität von $f(x) = Ax^b$ (A und b sind Konstanten mit $A \neq 0$).

Lösung: In diesem Fall ist $f'(x) = Abx^{b-1}$. Daher ist $\mathrm{El}_x Ax^b = (x/Ax^b)Abx^{b-1} = b$, so dass gilt:

$$f(x) = Ax^b \Longrightarrow \mathrm{El}_x f(x) = b \qquad (2)$$

Die Elastizität der Potenzfunktion Ax^b bezüglich x ist einfach der Exponent b. Somit hat diese Funktion eine konstante Elastizität. Tatsächlich ist dies der einzige Funktionstyp, der eine konstante Elastizität hat. Dies wird in Aufgabe 9.9.6 gezeigt.

[4] Man bezeichnet diese Elastizität auch als Punktelastizität.

Beispiel 2

Nehmen Sie an, dass die nachgefragte Menge für ein bestimmtes Gut gegeben ist durch:

$$D(P) = 8000P^{-1.5}$$

Berechnen Sie die Elastizität von $D(P)$ und bestimmen Sie die exakte prozentuale Änderung der nachgefragten Menge, wenn der Preis um 1 % von $P = 4$ aus ansteigt.

Lösung: Mit (2) folgt $\mathrm{El}_P\, D(P) = -1.5$, so dass ein Anstieg des Preises um 1 % eine Abnahme der Nachfrage um ungefähr 1.5 % verursacht.

In diesem Fall können wir die Abnahme in der Nachfrage exakt berechnen. Wenn der Preis 4 ist, ist die nachgefragte Menge $D(4) = 8000 \cdot 4^{-1.5} = 1000$. Wenn der Preis $P = 4$ um 1 % steigt, ist der neue Preis $4 + 4/100 = 4.04$, so dass die *Änderung* der Nachfrage gegeben ist durch

$$D(4.04) - D(4) = 8000 \cdot 4.04^{-1.5} - 1000 = -14.81$$

Die prozentuale Änderung in der Nachfrage von $D(4) = 1000$ ist $-(14.81/1000) \cdot 100 = -1.481$ %.

Beispiel 3

Es bezeichne $D(P)$ die Nachfragefunktion für ein Produkt. Durch den Verkauf von $D(P)$ Einheiten zum Preis P, hat der Hersteller den Erlös $R(P)$, gegeben durch $R(P) = PD(P)$. Die Elastizität von $R(P)$ bezüglich P ist

$$\mathrm{El}_P R(P) = \frac{P}{PD(P)} \frac{d}{dP}[PD(P)] = \frac{1}{D(P)}[D(P) + PD'(P)] = 1 + \mathrm{El}_P D(P)$$

Beachten Sie: Wenn $\mathrm{El}_P D(P) = -1$, dann ist $\mathrm{El}_P R(P) = 0$. Das heißt, wenn die Preiselastizität der Nachfrage in einem Punkt gleich -1 ist, dann hat eine kleine Preisänderung (fast) keinen Einfluss auf den Erlös. Allgemeiner gilt: Der durch eine Preisänderung erzeugte Grenzerlös dR/dP ist positiv, wenn die Preiselastizität der Nachfrage größer als -1 und negativ, wenn die Elastizität kleiner als -1 ist.

Anmerkung 1 Ökonomen verwenden oft die folgende Terminologie:

- Wenn $|\mathrm{El}_x f(x)| > 1$, dann ist f elastisch an der Stelle x.
- Wenn $|\mathrm{El}_x f(x)| = 1$, dann ist f 1-elastisch (ausgeglichen elastisch) an der Stelle x.
- Wenn $|\mathrm{El}_x f(x)| < 1$, dann ist f unelastisch an der Stelle x.
- Wenn $|\mathrm{El}_x f(x)| = 0$, dann ist f vollkommen unelastisch an der Stelle x.

Anmerkung 2 Wenn $y = f(x)$ eine inverse Funktion $x = g(y)$ hat, dann gilt

$$\mathrm{El}_y g(y) = \frac{y}{g(y)} g'(y) = \frac{f(x)}{x} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\mathrm{El}_x f(x)} \tag{3}$$

Mit der Notation aus (7.3.5) erhält man:

$$\mathrm{El}_y x = \frac{1}{\mathrm{El}_x y} \tag{4}$$

Es gibt einige Regeln für Elastizitäten von Summen, Produkten, Quotienten und verketteten Funktionen, die gelegentlich nützlich sind. Sie sollten daher die Regeln in Aufgabe 9 herleiten.

Elastizitäten als logarithmische Ableitungen

Nehmen Sie an, dass die zwei Variablen x und y durch die folgende Gleichung in Beziehung stehen

$$y = Ax^b \qquad (x, y \text{ und } A \text{ sind positiv}) \tag{5}$$

Wenn wir den natürlichen Logarithmus auf beiden Seiten von (4) bilden und die Regeln für Logarithmen beachten, sehen wir, dass (2) äquivalent ist zu der Gleichung

$$\ln y = \ln A + b \ln x \tag{6}$$

Wir sehen an (6), dass $\ln y$ eine lineare Funktion von $\ln x$ ist und sagen deshalb, dass (6) eine **loglineare** Beziehung zwischen x und y ist. Die Transformation von (5) in (6) sieht man oft in ökonomischen Modellen, manchmal mit Logarithmen zu anderen Basen als e.

Für die durch (5) definierte Funktion wissen wir aus Beispiel 1, dass $\mathrm{El}_x y = b$ ist. Deshalb sehen wir aus (6), dass $\mathrm{El}_x y$ gleich der (doppelten) logarithmischen Ableitung $d \ln y / d \ln x$ ist, die gleich der konstanten Steigung dieser loglinearen Beziehung ist.

Dieses Beispiel illustriert die allgemeine Regel, dass Elastizitäten gleich solchen logarithmischen Ableitungen sind. In der Tat gilt: Wenn x und y beide positive Variablen sind und y eine differenzierbare Funktion von x ist, dann zeigt ein Beweis, der mehrfach die Kettenregel verwendet, dass

$$\mathrm{El}_x y = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln y}{d \ln x} \tag{7}$$

Aufgaben für Kapitel 7.7

1. Bestimmen Sie die Elastizitäten der durch die folgenden Formeln gegebenen Funktionen:

(a) $3x^{-3}$ (b) $-100x^{100}$ (c) $\sqrt{x}$ (d) $\dfrac{A}{x\sqrt{x}}$ (A ist eine Konstante)

2. Eine Untersuchung der Verkehrswirtschaft verwendet die Beziehung $T = 0.4K^{1.06}$, wobei K die Ausgaben für den Straßenbau und T ein Maß für das Verkehrsaufkommen sind. Bestimmen Sie die Elastizität von T bezüglich K. Zu ungefähr welcher prozentualen Änderung des Verkehrsaufkommens führt eine Erhöhung der Ausgaben um 1 %?

3. (a) Eine Untersuchung der norwegischen Staatseisenbahnen ergab, dass für Fahrten bis zu 60 km die Preiselastizität des Verkehraufkommens ungefähr gleich -0.4 war. Welches sind nach dieser Studie die Konsequenzen einer Erhöhung der Fahrpreise um 10 %?

➡ Fortsetzung

(b) Die entsprechende Elastizität für Reisen über 300 km wurde als ungefähr -0.9 berechnet. Können Sie sich einen Grund dafür denken, warum diese Elastizität im Absolutbetrag größer ist als die vorige?

4. Verwenden Sie Definition (1), um $\mathrm{El}_x y$ für die folgenden Funktionen zu bestimmen (a und p sind Konstante):

(a) $y = e^{ax}$ (b) $y = \ln x$ (c) $y = x^p e^{ax}$ (d) $y = x^p \ln x$

5. Zeigen Sie: $\mathrm{El}_x(f(x))^p = p\mathrm{El}_x f(x)$ (p ist eine Konstante).

6. Für den Zeitraum 1927 bis 1941 wurde die Nachfrage D nach Äpfeln in den USA als Funktion des Einkommens r geschätzt als $D = Ar^{1.23}$, wobei A eine Konstante ist. Bestimmen und interpretieren Sie die Elastizität von D bezüglich r. (Diese Elastizität heißt die Einkommenselastizität der Nachfrage oder die *Engel-Elastizität.*)

7. Voorhees u. a. untersuchten die Verkehrssysteme in 37 amerikanischen Städten und schätzten die durchschnittliche Fahrtzeit zur Arbeit m (in Minuten) als eine Funktion der Einwohnerzahl N. Sie fanden heraus, dass $m = e^{-0.02}N^{0.19}$. Schreiben Sie die Beziehung in loglinearer Form. Wie groß ist der Wert von m, wenn $N = 480\,000$ ist?

8. Bestimmen Sie $\mathrm{El}_x Af(x)$ und $\mathrm{El}_x[A + f(x)]$ in Abhängigkeit von $\mathrm{El}_x f(x)$. (A ist eine positive Konstante.)

Anspruchsvollere Aufgaben

9. Zeigen Sie: Wenn f und g differenzierbare Funktionen von x sind und A eine Konstante ist, dann gelten die folgenden Regeln (dabei schreiben wir z. B. $\mathrm{El}_x f$ anstelle $\mathrm{El}_x f(x)$).

(a) $\mathrm{El}_x A = 0$

(b) $\mathrm{El}_x(fg) = \mathrm{El}_x f + \mathrm{El}_x g$

(c) $\mathrm{El}_x\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathrm{El}_x f - \mathrm{El}_x g$

(d) $\mathrm{El}_x(f+g) = \dfrac{f\,\mathrm{El}_x f + g\,\mathrm{El}_x g}{f+g}$

(e) $\mathrm{El}_x(f-g) = \dfrac{f\,\mathrm{El}_x f - g\,\mathrm{El}_x g}{f-g}$

(f) $\mathrm{El}_x f\big(g(x)\big) = \mathrm{El}_u f(u)\mathrm{El}_x u$ $(u = g(x))$

10. Verwenden Sie die Regeln aus Aufgabe 9, um das Folgende zu berechnen:

(a) $\mathrm{El}_x(-10x^{-5})$ (b) $\mathrm{El}_x(x + x^2)$ (c) $\mathrm{El}_x(x^3 + 1)^{10}$

(d) $\mathrm{El}_x(\mathrm{El}_x 5x^2)$ (e) $\mathrm{El}_x(1 + x^2)$ (f) $\mathrm{El}_x\left(\dfrac{x-1}{x^5+1}\right)$

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

7.8 Stetigkeit

Grob gesagt ist eine Funktion stetig, wenn kleine Änderungen in der unabhängigen Variablen kleine Änderungen im Funktionswert hervorrufen. Geometrisch gesehen *ist eine Funktion stetig auf einem Intervall, wenn ihr Graph zusammenhängend ist – d. h. keine Sprünge aufweist*. Ein Beispiel ist in Abb. 1 angedeutet.

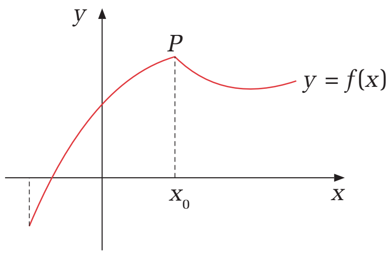

Abbildung 1: Eine stetige Funktion

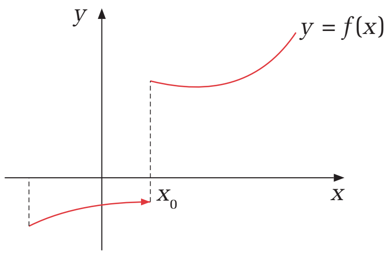

Abbildung 2: Eine unstetige Funktion

Es wird oft gesagt, dass eine Funktion stetig ist, wenn ihr Graph gezeichnet werden kann, ohne den Bleistift vom Papier abzuheben. Wenn der Graph einen oder mehrere Sprünge macht, sagen wir, dass f *unstetig* ist. Daher ist die Funktion, deren Graph in Abb. 2 gezeigt wird, unstetig an der Stelle $x = x_0$, jedoch stetig in allen anderen Punkten des Intervalls, das ihren Definitionsbereich ausmacht. Der Graph zeigt, dass $f(x) < 0$ für alle $x < x_0$, jedoch $f(x) > 0$ für alle $x \geq x_0$, so dass es einen Sprung an der Stelle $x = x_0$ gibt.

Warum ist es uns wichtig, zwischen stetigen und unstetigen Funktionen zu unterscheiden? Ein bedeutender Grund ist, dass wir gewöhnlich mit numerischen Approximationen arbeiten müssen. Wenn z. B. eine Funktion f durch eine Formel gegeben ist und wir $f(\sqrt{2})$ berechnen wollen, betrachten wir es gewöhnlich als selbstverständlich, dass wir $f(1.4142)$ berechnen können und eine gute Approximation an $f(\sqrt{2})$ erhalten. In Wirklichkeit wird dabei implizit angenommen, dass f stetig ist. Da 1.4142 nahe an $\sqrt{2}$ ist, muss dann der Wert $f(1.4142)$ nahe an $f(\sqrt{2})$ sein.

In Anwendungen der Mathematik in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften stellt eine Funktion oft die Änderung eines Phänomens mit der Zeit dar. Die Stetigkeit der Funktion wird dann die Stetigkeit des Phänomens widerspiegeln, im Sinne einer allmählichen Entwicklung ohne plötzliche Änderungen. Wir könnten z. B. an die Körpertemperatur einer Person als Funktion der Zeit denken. Wir können dabei annehmen, dass sie sich stetig ändert und dass sie nicht von einem Wert zu einem anderen springt, ohne die dazwischen liegenden Werte zu passieren. Auf der anderen Seite, wenn wir den Preis eines Barrels Öl auf einem gewissen Markt betrachten, wird dieser als Funktion der Zeit unstetig sein. Ein Grund ist der, dass der Preis (gemessen in Dollar oder einer anderen Währung) immer eine rationale Zahl sein muss. Ein zweiter und interessanterer Grund für gelegentliche große Preissprünge ist die plötzliche Ankunft einer Nachricht oder einer Unruhe, die entweder die Nachfrage- oder die Angebotsfunktion signifikant beeinflusst – z. B. ein plötzlicher Wechsel in der Regierung eines bedeutenden Öl exportierenden Landes.

Das Konzept der gerade erörterten Stetigkeit muss offensichtlich präziser gefasst werden, bevor wir es in mathematischen Argumenten verwenden können. Wir brauchen eine Definition der Stetigkeit, die nicht allein auf intuitiven geometrischen Ideen basiert.

Stetigkeit in Form von Grenzwerten

Wie oben erörtert, ist eine Funktion $y = f(x)$ stetig an der Stelle $x = x_0$, wenn kleine Änderungen in x kleine Änderungen in $f(x)$ hervorrufen. Anders ausgedrückt: Wenn x nahe an x_0 ist, dann muss $f(x)$ nahe an $f(x_0)$ sein. Dies legt die folgende Definition nahe:

$$f \quad \text{ist } \textbf{stetig} \text{ an der Stelle } x = x_0, \quad \text{wenn} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

Daher sehen wir: Damit f an der Stelle $x = x_0$ stetig ist, müssen die folgenden drei Bedingungen alle erfüllt sein:

(i) Die Funktion f muss an der Stelle $x = x_0$ definiert sein.

(ii) Der Grenzwert von $f(x)$, wenn x gegen x_0 strebt, muss existieren.

(iii) Dieser Grenzwert muss exakt gleich $f(x_0)$ sein.

Wenn nicht alle drei Bedingungen erfüllt sind, sagen wir, dass f **unstetig** ist an der Stelle x_0.

Abbildung 3 zeigt zwei wichtige Arten von Unstetigkeiten, die auftreten können. An der Stelle $x = x_0$ ist die Funktion unstetig, weil $f(x)$ offensichtlich keinen Grenzwert hat, wenn x gegen x_0 strebt. Daher ist Bedingung (ii) nicht erfüllt. Dies ist eine „irreparable“ Unstetigkeit. Andererseits existiert der Grenzwert von $f(x)$, wenn x gegen x_1 strebt, und ist gleich A. Da aber $A \neq f(x_1)$ ist, ist Bedingung (iii) nicht erfüllt, so dass f an der Stelle x_1 unstetig ist. Dies ist eine „reparable“ Unstetigkeit, die verschwindet, wenn $f(x_1)$ als A umdefiniert würde.

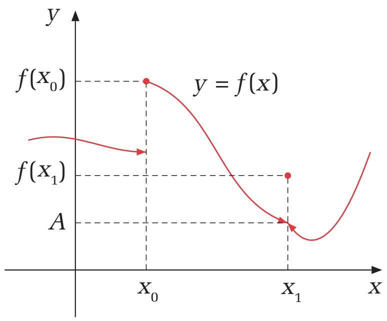

Abbildung 3: f hat zwei Unstetigkeitsstellen.
$x = x_0$ ist eine irreparable und $x = x_1$ ist eine reparable Unstetigkeitsstelle für f.

Eigenschaften von stetigen Funktionen

Mathematiker haben viele wichtige Resultate entdeckt, die nur für stetige Funktionen gelten. Es ist deshalb wichtig, entscheiden zu können, ob eine gegebene Funktion stetig ist oder nicht. Die in Kap. 6.5 für Grenzwerte gegebenen Regeln machen es leicht, Stetigkeit für viele Funktionstypen zu begründen. Beachten Sie: Wegen $\lim_{x\to x_0} c = c$ und $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ (in jedem Punkt x_0) sind die zwei Funktionen

$$f(x) = c \quad \text{und} \quad f(x) = x \ \text{ überall stetig.} \tag{2}$$

Dies ist, wie es sein sollte, da die Graphen dieser Funktionen Geraden sind. Wenn wir nun Definition (1) und die Regeln für Grenzwerte in (6.5.2) verwenden, erhalten wir sofort (a)–(c) in dem folgenden Theorem.

Resultate für stetige Funktionen

Wenn f und g stetig in x_0 sind, so gilt:

(a) $f + g$ und $f - g$ sind stetig in x_0.

(b) fg und f/g (falls $g(x_0) \neq 0$) sind stetig in x_0.

(c) $[f(x)]^r$ ist stetig in x_0, falls $[f(x_0)]^r$ definiert ist. (3)

(d) Wenn f stetig ist und auf dem Intervall I eine Inverse hat, so ist die Inverse f^{-1} stetig auf $f(I)$.

Zum Beispiel kann man den ersten Teil von (b) so beweisen: Wenn f und g beide stetig in x_0 sind, dann gilt $f(x) \to f(x_0)$ und $g(x) \to g(x_0)$, wenn $x \to x_0$. Aber dann gilt nach den Regeln für Grenzwerte $f(x)g(x) \to f(x_0)g(x_0)$, wenn $x \to x_0$, und dies bedeutet genau, dass fg stetig in $x = x_0$ ist. Das Resultat in (d) ist etwas trickreicher zu beweisen. Man kann es jedoch leicht glauben, da die Graphen von f und der Inversen f^{-1} symmetrisch zur Geraden $y = x$ sind.

Durch Verbindung von (2) und (3), folgt z. B., dass $h(x) = x + 8$ und $k(x) = 3x^3 + x + 8$ stetig sind. Im Allgemeinen folgt, dass ein Polynom, da es eine Summe von stetigen Funktionen ist, überall stetig ist. Ferner ist eine rationale Funktion

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (P(x) \text{ und } Q(x) \text{ sind Polynome}) \qquad (*)$$

stetig in allen x, für die $Q(x) \neq 0$ ist.

Betrachten Sie eine verkettete Funktion $f(g(x))$, wobei angenommen werde, dass f und g stetig sind. Wenn x nahe an x_0 ist, dann ist wegen der Stetigkeit von g in x_0 auch $g(x)$ nahe an $g(x_0)$. Wiederum wird $f(g(x))$ nahe an $f(g(x_0))$ sein, weil f stetig in $g(x_0)$ ist. Damit ist $f(g(x))$ stetig in x_0. In Kürze: *Verkettungen von stetigen Funktionen sind stetig*: Wenn g stetig in $x = x_0$ ist und f stetig in $g(x_0)$ ist, dann ist $f\big(g(x)\big)$ stetig in $x = x_0$. Im Allgemeinen gilt:

Jede Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Kombination einer oder mehrerer der folgenden Operationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer durch Null) und Verkettung, erzeugt werden kann, ist stetig. (4)

Indem wir die gerade erörterten Regeln anwenden, wird gewöhnlich ein einziger Blick auf die Formel, die die Funktion definiert, genügen, um die Punkte zu bestimmen, in denen sie stetig ist.

Copyright