WWW.PEARSON-STUDIUM.DE
CWS
COMPANION WEBSITE

Martin Kreuzer
Stefan Kühling

Logik für Informatiker

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Martin Kreuzer
Stefan Kühling

Logik für Informatiker

PEARSON

Higher Education

München • Harlow • Amsterdam • Madrid • Boston
San Francisco • Don Mills • Mexico City • Sydney

a part of Pearson plc worldwide

5) Jetzt berechnen wir die KNF von H^*. Es gilt

$$\begin{aligned} H^* &= \left[Q(b) \vee P\left(b, g(z)\right)\right] \vee \left[P\left(f(h(z)), y\right) \wedge Q(a)\right] \\ &\equiv \left(Q(b) \vee P\left(b, g(z)\right) \vee P\left(f(h(z)), y\right)\right) \wedge \left(Q(b) \vee P\left(b, g(z)\right) \vee Q(a)\right) . \end{aligned}$$

Die letzte Formel bezeichnen wir mit K.

6) Schließlich erhalten wir die MKF von F als die Klauselmenge von K, nämlich

$$\begin{aligned} \mathrm{MKF}(F) = \mathcal{K}(K) = \{&\{Q(b), P\left(b, g(z)\right), P\left(f(h(z)), y\right)\}, \\ &\{Q(b), P\left(b, g(z)\right), Q(a)\}\} . \end{aligned}$$

4.C Die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

In der Aussagenlogik konnten wir mit der Wahrheitstafelmethode durch Prüfen einer endlichen Anzahl von Belegungen entscheiden, ob eine Formel erfüllbar ist oder nicht. In der Prädikatenlogik ist dies i. A. unmöglich, denn es gibt Formeln, die zwar erfüllbar sind, aber nur unendliche Modelle besitzen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.27

Gegeben sei die prädikatenlogische Formel

$$\begin{aligned} F = {} & \forall u\colon \forall v\colon \forall w : ((P(u,v) \wedge P(v,w)) \Rightarrow P(u,w)) \\ & \wedge\ \forall x\colon \neg P(x,x) \wedge \forall y\colon P\left(y, f\left(y\right)\right) . \end{aligned}$$

a) Die Formel F besitzt das folgende unendliche Modell $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$:

$$U = \mathbb{N}\,, \quad \varphi(f)\colon \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,, \\ n \mapsto n+1 \end{array} \qquad \psi(P) = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a < b\right\}$$

und ξ beliebig (denn alle Variablen sind gebunden). Es gilt:

1) $\alpha(\forall u\colon \forall v\colon \forall w : ((P(u,v) \wedge P(v,w)) \Rightarrow P(u,w))) = 1$, denn $u < v$ und $v < w$ impliziert $u < w$ für $u, v, w \in \mathbb{N}$.
2) $\alpha(\forall x\colon \neg P(x,x)) = 1$, denn $x < x$ gilt für kein $x \in \mathbb{N}$.
3) $\alpha\left(\forall y\colon P\left(y, f\left(y\right)\right)\right) = 1$, denn $y < \varphi\left(f\right)\left(y\right) = y + 1$ gilt für alle $y \in \mathbb{N}$.

Insgesamt folgt $\alpha(F) = 1$, d. h. α ist ein Modell für F.

b) Die Formel F besitzt kein endliches Modell.

Angenommen $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$ sei ein Modell für F und U sei eine endliche Menge. Sei $u \in U$. Für $i \geq 0$ sei $u_i = \varphi\left(f\right)^i(u)$, d. h. es gelte $u_0 = u$, $u_1 = \varphi\left(f\right)(u)$, $u_2 = \varphi\left(f\right)(u_1)$, etc. Dann gilt $(u_i, u_{i+1}) \in \psi(P)$ für alle $i \geq 0$ nach dem dritten Konjunktionsglied und somit ergibt sich $\left(u_i, u_j\right) \in \psi(P)$ für alle $0 \leq i < j$ nach dem ersten Konjunktionsglied.

Da U endlich ist, muss es $0 \leq i < j$ geben mit $u_i = u_j$. Doch dann widerspricht $(u_i, u_i) \in \psi(P)$ dem zweiten Konjunktionsglied.

▶ Theorem 4.28: Churchs Theorem: Die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Es gibt keinen Algorithmus, der für jede beliebige gegebene prädikatenlogische Formel F in endlich vielen Schritten entscheidet, ob F erfüllbar ist oder nicht.

Der Beweis dieses Theorems beruht auf tief liegenden Resultaten der Berechenbarkeitstheorie. Man kann ihn z. B. zurückführen auf das Halteproblem für Turing-Maschinen oder das Postsche Korrespondenzproblem, die in einschlägigen Werken der Berechenbarkeitstheorie als unentscheidbar nachgewiesen werden. Da diese Beweise über die mathematische Logik hinausführen und den Rahmen dieses Buches sprengen würden, verweisen wir auf Standardwerke zur Berechenbarkeitstheorie, z. B. [7] und [14]. Einen vollständigen Beweis im Rahmen der Logik findet der Leser auch in [12], Kap. III.8. Jedoch wollen wir uns angesichts des Churchschen Theorems noch nicht geschlagen geben. Immerhin können wir versuchen, zu einer gegebenen prädikatenlogischen Formel systematisch nach einem Modell zu suchen, in dem sie gilt. Genauer studieren wir im Weiteren die folgenden Fragen.

1) Wie könnte man bei gegebenener Formel F systematisch nach einem zu F passenden Modell suchen?
2) Wie findet man eine möglichst kleine Grundmenge U, so dass man ein Modell $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$ für F ansetzen kann?
3) Wenn eine Formel F unerfüllbar ist, kann man dies in endlich vielen Schritten nachweisen? (Semi-Entscheidbarkeit der Prädikatenlogik)

Definition 4.29

Sei F eine geschlossene prädikatenlogische Formel in Skolemform, d. h. sei F eine prädikatenlogische Formel, so dass gilt:

1) F enthält keine freien Variablen,
2) F ist in BPF,
3) F enthält keine Existenzquantoren.

Dann sei $D(F)$ die Menge aller variablenfreien Terme, die aus den in F vorkommenden Funktionssymbolen und Konstanten gebildet werden können. Enthält F keine Konstanten, so wählen wir eine zusätzliche Konstante a.

Mit anderen Worten, die Menge $D(F)$ ist induktiv wie folgt definiert:

a) Alle in F enthaltenen Konstanten sind in $D(F)$. Enthält F keine Konstanten, so sei eine Konstante a in $D(F)$.
b) Ist f ein in F vorkommendes, k-stelliges Funktionssymbol und sind $t_1, \ldots, t_k \in D(F)$ Terme, so sei $f(t_1, \ldots, t_k) \in D(F)$.

Die Menge $D(F)$ heißt das **Herbrand-Universum** von F.

Beispiel 4.30: Geo-Logisches

Die Frage, ob sich unter einer Reihe von Erdschichten ausreichend Grundwasser sammeln kann, hängt von mehreren Fakoren ab: der aus der Dicke der Humusschicht zu berechnenden Durchlässigkeit, der Durchlässigkeit der Lehm- und Gesteinsschichten und der Dicke der Gesteinsschicht. Wenn letztere im Vergleich zu den beiden Durchlässigkeiten nicht zu groß ist, kann sich Grundwasser sammeln.

1) Zuerst wollen wir eine prädikatenlogische Formel aufstellen, die genau dann wahr ist, wenn sich stets Grundwasser sammeln kann. Die Funktion $f(x)$ berechne die Durchlässigkeit einer Humusschicht bei der Dicke x. Die Funktion $g(y, z)$ berechne die Durchlässigkeit der Lehm- und Gesteinsschichten aus der Dicke y der Lehmschicht und der Dicke z der Gesteinsschicht. Das dreistellige Prädikatsymbol P drücke schließlich aus, dass das dritte Argument „nicht zu groß" ist im Vergleich zu den ersten beiden. Wir erhalten die prädikatenlogische Formel

$$F = \forall x\colon \forall y\colon \forall z\colon P\left(f(x), g(y, z), z\right) .$$

2) Da F keine Konstante enthält, führen wir eine Konstante a ein. Das Herbrand-Universum ist dann

$$\begin{aligned} D(F) = \{&a, f(a), g(a, a), f(g(a, a)), f(f(a)), g(a, f(a)), \\ &g(f(a), a), g(f(a), f(a)), \dots\} . \end{aligned}$$

In der Situation unseres fortlaufenden Beispiels (vgl. Beispiel 4.31) gibt es bereits zwei Konstanten. In diesem Fall sieht das Herbrand-Universum folgendermaßen aus.

Beispiel 4.31: Psycho-Logisches

Zu der Klauselmenge

$$\mathrm{MKF}(F) = \left\{\left\{Q(b), P(b, g(z)), P(f(h(z)), y)\right\}, \left\{Q(b), P(b, g(z)), Q(a)\right\}\right\}$$

aus Beispiel 4.26 berechnen wir einige einfache Elemente des Herbrand-Universums und erhalten

$$\begin{aligned} D(K) = \{&a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), h(a), h(b), \\ &f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)), f(h(a)), f(h(b)), \\ &g(f(a)), g(f(b)), \dots\} . \end{aligned}$$

Die Idee hinter der Definition des Herbrand-Universums ist, dass die Menge $D(F)$ als der „kleinste" Grundbereich dienen soll, über dem wir nach einem Modell für F suchen.

Definition 4.32

Sei F eine geschlossene prädikatenlogische Formel in Skolemform. Eine zu F passende Struktur $\alpha = (U, \varphi, \psi, \zeta)$ heißt eine **Herbrand-Struktur** für F, falls gilt:

a) $U = D(F)$.

b) Ist f ein in F vorkommendes k-stelliges Funktionssymbol und sind $t_1, \dots, t_k \in D(f)$, so gilt $\varphi(f)(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k)) = f(t_1, \dots, t_k)$.

Man beachte dabei, dass letztere Vorschrift wohldefiniert ist, denn $\varphi(f)$ ist eine Abbildung $\varphi(f) : U^k \to U$ und es gilt $\alpha(t_i) \in U$.

Beispiel 4.33: Geo-Logisches

Sei $F = \forall x \colon \forall y \colon \forall z \colon P\left(f(x), g(y,z), z\right)$ wie in Beispiel 4.30. Für eine Herbrand-Struktur $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$ für F muss Folgendes gelten.

a) $U = D(F) = \left\{a, f(a), g(a,a), \ldots\right\}$.

b) Die Abbildung $\varphi \colon \{f, g\} \to \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{Abb}\left(U^k, U\right)$ unterliegt folgenden Einschränkungen:

   1) Die Abbildung $\varphi(f) : U \to U$ muss die Gleichheiten $\varphi(f)(a) = f(a)$, $\varphi(f)(f(a)) = f(f(a))$, $\varphi(f)(g(a,a)) = f(g(a,a))$ etc. erfüllen.
   2) Die Abbildung $\varphi(g) : U^2 \to U$ muss die Gleichheiten $\varphi(g)(a,a) = g(a,a)$, $\varphi(g)(a, f(a)) = g(a, f(a))$, $\varphi(g)(f(a), a) = g(f(a), a)$ etc. erfüllen.

c) Für die Teilmenge $\psi(P) \subseteq U^3$ haben wir keine Bedingungen vorgegeben. Wählen wir z. B. $\psi(P) = U^3$, so ist die so definierte Herbrand-Struktur α ein Modell für F.

Definition 4.34

Sei F eine geschlossene prädikatenlogische Formel in Skolemform. Eine Herbrand-Struktur $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$ für F heißt ein **Herbrand-Modell** für F, falls $\alpha \models F$ gilt.

Beispiel 4.35: Psycho-Logisches

Passend zur Skolemform aus Beispiel 4.26

$$K \equiv \forall z \colon \forall y \colon \left[Q(b) \vee P\left(b, g(z)\right) \vee \left(P\left(f(h(z)), y\right) \wedge Q(a)\right)\right]$$

geben wir jetzt eine Herbrand-Struktur $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$ an.

$$\begin{aligned}
U &\overset{4.31}{=} D(K) \\
\varphi(f) &: U^2 \to U \\
&\quad a \mapsto f(a), b \mapsto f(b), \ldots \\
\varphi(g) &: U \to U \\
&\quad a \mapsto g(a), b \mapsto g(b), \ldots \\
\varphi(h) &: U \to U \\
&\quad a \mapsto h(a), b \mapsto h(b), \ldots \\
\psi(P) &= U^2 \\
\psi(Q) &= U \\
\xi &: \text{beliebig}
\end{aligned}$$

Mit dieser Struktur gilt $\alpha \models F$.

Satz 4.36: Der Satz von Löwenheim-Skolem

Sei F eine geschlossene prädikatenlogische Formel in Skolemform. Genau dann ist F erfüllbar, wenn F ein Herbrand-Modell besitzt.

Beweis Schreibe $F = \forall x_1 : \ldots : \forall x_\ell : G$ mit einer prädikatenlogischen Formel G. Besitzt F ein Herbrand-Modell, so ist F offenbar erfüllbar. Sei nun umgekehrt ein Modell $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$ für F gegeben. Kommt in F keine Konstante vor, so füge eine Definition $\varphi(a) = u$ zu α hinzu, wobei $u \in U$ beliebig gewählt werden kann. Unser Ziel ist es, ein Herbrand-Modell $\widehat{\alpha} = \left(D(F), \widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{\xi}\right)$ für F zu finden. Dazu nehmen wir $\widehat{\varphi} = \varphi$ und $\widehat{\xi} = \xi$. Zur Festlegung von $\widehat{\psi}$ sei P ein k-stelliges Prädikatsymbol, das in F vorkommt und seien $t_1, \ldots, t_k \in D(F)$. Nach Konstruktion von $D(F)$ und wegen der eventuellen Ergänzung von α sind die Werte $\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k) \in U$ wohldefiniert.

Also können wir

$$\widehat{\psi}(P) = \left\{ (t_1, \ldots, t_k) \in D(F)^k \mid (\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k)) \in \psi(P) \right\}$$

vereinbaren. Mit Induktion nach ℓ zeigen wir nun, dass $\widehat{\alpha}$ ein Modell für F ist. Im Fall $\ell = 0$ ist dies klar, denn nach Definition von $\widehat{\psi}$ liefern α und $\widehat{\alpha}$ für eine atomare Formel $P(t_1, \ldots, t_k)$ denselben Wert.

Sei nun $\ell > 0$ und sei $\widetilde{F}$ die Formel $\forall x_2 : \ldots : \forall x_\ell : G$. Da x_1 in $\widetilde{F}$ frei vorkommen kann, ist die Induktionsvoraussetzung nicht direkt anwendbar. Jedoch wissen wir $\alpha\left(\widetilde{F}|_{x_1 \mapsto u}\right) = 1$ für jedes $u \in U$. Insbesondere zeigt dies $\alpha\left(\widetilde{F}|_{x_1 \mapsto \alpha(t)}\right) = 1$ für jedes $t \in D(F)$. Nach Definition von $\widehat{\alpha}$ folgt somit $\widehat{\alpha}\left(\widetilde{F}|_{x_1 \mapsto t}\right) = 1$, also auch die Gleichheit $\widehat{\alpha}(F) = \widehat{\alpha}\left(\forall x_1 : \widetilde{F}\right) = 1$. □

Korollar 4.37

Ist F eine erfüllbare prädikatenlogische Formel, so gibt es ein Modell $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$ für F, in dem U eine abzählbare Menge ist.

Beweis Nach Abschnitt 4.B kann man F so in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel G in Skolemform überführen, dass jedes Modell für G auch ein Modell für F ist. Insbesondere ist dann das (abzählbare) Herbrand-Modell für G ein Modell für F. □

Definition 4.38

Sei F eine geschlossene prädikatenlogische Formel in Skolemform. Dann ist F also von der Gestalt $F = \forall x_1 : \forall x_2 : \ldots : \forall x_n : F^*$ mit der Matrixformel F^* von F. Die **Herbrand-Expansion** $E(F)$ von F ist definiert als die folgende (abzählbare) Menge prädikatenlogischer Formeln:

$$E(F) = \left\{ F^*|_{x_1 \mapsto t_1, x_2 \mapsto t_2, \ldots, x_n \mapsto t_n} \mid t_1, \ldots, t_n \in D(F) \right\}$$

Beispiel 4.39: Geo-Logisches

Sei wieder die Formel $F = \forall x : \forall y : \forall z : P\left(f(x), g(y, z), z\right)$ aus Beispiel 4.30 gegeben. Dann gilt

$$D(F) = \left\{a, f(a), g(a, a), f\left(f(a)\right), f\left(g(a, a)\right), g\left(a, f(a)\right), \ldots\right\} \text{ und}$$

$$
\begin{aligned}
E(F) = \{&P(f(a), g(a,a), a), && \text{mit } x \mapsto a, y \mapsto a, z \mapsto a \\
&P(f(f(a)), g(a,a), a), && \text{mit } x \mapsto f(a), y \mapsto a, z \mapsto a \\
&P(f(a), g(f(a), a), a), && \text{mit } x \mapsto a, y \mapsto f(a), z \mapsto a \\
&P(f(a), g(a, f(a)), f(a)), && \text{mit } x \mapsto a, y \mapsto a, z \mapsto f(a) \\
&P(f(g(a,a)), g(a,a), a), \ldots\} && \text{mit } x \mapsto g(a,a), y \mapsto a, z \mapsto a
\end{aligned}
$$

Sind bereits Konstanten in F vorhanden, so kann man die Herbrand-Expansion von F z. B. wie folgt bestimmen.

Beispiel 4.40: Psycho-Logisches

Zur Skolemformel aus Beispiel 4.26

$$F \equiv \forall z \colon \forall y \colon \left[Q(b) \vee P(b, g(z)) \vee (P(f(h(z)), y) \wedge Q(a))\right]$$

und dem Herbrand-Universum aus Beispiel 4.31 hat die Herbrand-Expansion die folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
E(F) = \{&Q(b) \vee P(b, g(a)) \vee (P(f(h(a)), a) \wedge Q(a)), \\
&y, z \mapsto a \\
&Q(b) \vee P(b, g(b)) \vee (P(f(h(b)), a) \wedge Q(a)), \\
&y \mapsto a, z \mapsto b \\
&Q(b) \vee P(b, g(a)) \vee (P(f(h(a)), b) \wedge Q(a)), \\
&y \mapsto b, z \mapsto a \\
&Q(b) \vee P(b, g(b)) \vee (P(f(h(b)), b) \wedge Q(a)), \\
&y, z \mapsto b \\
&Q(b) \vee P(b, g(g(b))) \vee (P(f(h(g(b))), a) \wedge Q(a)), \\
&y \mapsto a, z \mapsto g(b) \\
&Q(b) \vee P(b, g(h(a))) \vee (P(f(h(h(a))), b) \wedge Q(a)), \\
&y \mapsto b, z \mapsto h(a) \\
&\ldots\}
\end{aligned}
$$

Bemerkung 4.41

Die Formeln in $E(F)$ enthalten keine Variablen. Die atomaren Teilformeln können in $A_0, A_1, A_2, \ldots$ umbenannt werden. Dadurch erhalten wir eine (abzählbare) Menge aussagenlogischer Formeln. Um ein Modell für $E(F)$ zu finden, genügt es, den atomaren Formeln in $E(F)$ geeignete Wahrheitswerte zuzuweisen. Dies ist ein aussagenlogisches Problem.

▶ Theorem 4.42: Gödel-Herbrand-Skolem

Eine geschlossene prädikatenlogische Formel F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn $E(F)$ im aussagenlogischen Sinn erfüllbar ist.

Beweis Es ist zu zeigen, dass F genau dann ein Herbrand-Modell besitzt, wenn $E(F)$ erfüllbar ist. Wir schreiben $F = \forall x_1 \colon \forall x_2 \colon \ldots \colon \forall x_n \colon F^*$. Genau dann ist α ein Herbrand-

Modell für F, wenn für alle $t_1, \dots, t_n \in D(F)$ gilt

$$\alpha\left(F^*|_{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n}\right) = 1$$

und dies ist äquivalent mit $\alpha(G) = 1$ für alle $G \in E(F)$. □

Aus diesem Theorem ergibt sich direkt ein Algorithmus, mit dem man die Unerfüllbarkeit einer prädikatenlogischen Formel nachweisen kann.

Korollar 4.43: Der Grundresolutionsalgorithmus

Sei F eine prädikatenlogische Formel. Betrachte die folgenden Instruktionen.

1) Ersetze F mit Hilfe von Satz 4.22 durch eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel, die geschlossen und in Skolemform ist.
2) Schreibe G in der Form $G = \forall x_1 : \dots : \forall x_n : G^*$. Bringe G^* in KNF und erhalte eine Formel $H = \forall x_1 : \dots : \forall x_n : H^*$.
3) Setze $M = \emptyset$ und $i = 0$.
4) Erhöhe i um eins. Berechne dann das i-te Element H_i von $E(H)$. Füge dieses zu M hinzu, d. h. setze $M = \{H_1, \dots, H_i\}$.
4) Betrachte M als Menge aussagenlogischer Formeln (vgl. Bemerkung 4.41) und prüfe mit Hilfe des aussagenlogischen Resolutionskalküls, ob M unerfüllbar ist. Ist dies der Fall, so gib „F ist unerfüllbar" aus und stoppe. Andernfalls fahre mit Schritt 3) fort.

Ist F eine unerfüllbare Formel, so ist dies ein Algorithmus, der die Unerfüllbarkeit von F nachweist. Ist F erfüllbar, so ist dies eine nicht endende Prozedur (Unendlichschleife).

Beweis Dies folgt sofort aus Theorem 4.42 und Kapitel 3. □

Bemerkung 4.44

Das Korollar zeigt, dass die Prädikatenlogik **semi-entscheidbar** ist im folgenden Sinn:

a) Ist F eine unerfüllbare prädikatenlogische Formel, so kann man dies in endlich vielen Schritten nachweisen. Man hat aber keine Schranke für die Zahl der Schritte und weiß somit nie, ob F erfüllbar ist.
b) Durch Eingabe von $\neg F$ in den Grundresolutionsalgorithmus kann man auch in endlich vielen Schritten nachweisen, dass F eine Tautologie ist.
c) Für erfüllbare Formeln, die keine Tautologien sind, kann es keinen Nachweisalgorithmus geben (vgl. Theorem 4.28).

4.D Das Resolutionskalkül der Prädikatenlogik

Wie wir soeben gesehen haben, kann man die Unerfüllbarkeit einer prädikatenlogischen Formel in endlich vielen Schritten beweisen. Für die Zahl der notwendigen Schritte lässt sich jedoch keine allgemein gültige Schranke angeben. Der Grundresolutionsalgorithmus soll im Folgenden verbessert werden. Um einen Einblick in mögliche Ansatzpunkte zur Optimierung des Verfahrens zu erhalten, wenden wir es zuerst an zwei relativ einfachen Beispielen explizit an. Der erste Schritt ist jeweils die Umwandlung der Formel in ihre Matrixklauselform.

Beispiel 4.45

Wir betrachten die prädikatenlogische Formel

$$F = \forall x\colon\ \big(P\left(f(x)\right) \wedge \neg P(x)\big)$$

und wollen ihre Unerfüllbarkeit beweisen. Es gilt

$$F^* = P\left(f(x)\right) \wedge \neg P(x) \quad \text{sowie} \quad \mathcal{K}\left(F^*\right) = \left\{\left\{P\left(f(x)\right)\right\}, \{\neg P(x)\}\right\} .$$

Daraus ergibt sich

$$D(F) = \left\{a, f(a), f\left(f(a)\right), \ldots\right\} \qquad \text{und}$$

$$E(F) = \left\{P\left(f(a)\right) \wedge \neg P(a),\ P\left(f\left(f(a)\right) \wedge \neg P\left(f(a)\right)\right), \ldots\right\} .$$

1) Die Klauselmenge $\left\{\left\{P\left(f(a)\right)\right\}, \{\neg P(a)\}\right\}$ ist erfüllbar.
2) Die Klauselmenge $\left\{\left\{P\left(f(a)\right)\right\}, \{\neg P(a)\}, \left\{P\left(f\left(f(a)\right)\right)\right\}, \left\{\neg P\left(f(a)\right)\right\}\right\}$ ist nicht erfüllbar, denn

$$\begin{array}{ccc} \left\{P\left(f(a)\right)\right\} & & \left\{\neg P\left(f(a)\right)\right\} \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & \emptyset\ . & \end{array}$$

Bei der Herleitung der Unerfüllbarkeit werden zwei Klauseln generiert, nämlich $\{\neg P(a)\}$ und $\left\{P\left(f\left(f(a)\right)\right)\right\}$, die gar nicht benötigt werden. Man kann den Unerfüllbarkeitsbeweis auch folgendermaßen interpretieren:

$$\begin{array}{cccccc} \mathcal{K}\left(F^*\right): & & \left\{P\left(f(x)\right)\right\} & & \{\neg P(x)\} & \\ & x \mapsto a & \Big| & & \Big| & x \mapsto f(a) \\ & & \left\{P\left(f(a)\right)\right\} & & \left\{\neg P\left(f(a)\right)\right\} & \\ & & & \diagdown \quad \diagup & & \\ & & & \emptyset & & \end{array}$$

Beispiel 4.46

Gegeben sei die prädikatenlogische Formel

$$F = \forall x\colon \forall y\colon Q(x) \wedge (P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg Q(f(a))) \wedge (\neg P(b) \vee \neg Q(g(b,y)))\ .$$

Aus ihr erhalten wir die Matrixformel

$$F^* = Q(x) \wedge (P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg Q(f(a))) \wedge (\neg P(b) \vee \neg Q(g(b,y)))$$

sowie ihre Klauselmenge

$$\mathcal{K}(F^*) = \{\{Q(x)\}, \{P(x), \neg Q(y), \neg Q(f(a))\}, \{\neg P(b), \neg Q(g(b,y))\}\}\ .$$

Wir versuchen wieder, die Unerfüllbarkeit von F zu beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned}
D(F) &= \{a, b, f(a), g(b,a), g(b,b), \dots\} \quad \text{sowie}\\
E(F) &= \{Q(a) \wedge (P(a) \vee \neg Q(a) \vee \neg Q(f(a))) \wedge (\neg P(b) \vee \neg Q(g(b,a)))\,,\\
&\qquad Q(a) \wedge (P(a) \vee \neg Q(b) \vee \neg Q(f(a))) \wedge (\neg P(b) \vee \neg Q(g(b,a)))\,,\\
&\qquad Q(b) \wedge (P(b) \vee \neg Q(a) \vee \neg Q(f(a))) \wedge (\neg P(b) \vee \neg Q(g(b,a)))\,,\\
&\qquad \text{etc.}\}\ .
\end{aligned}$$

Bei der ersten Formel in $E(F)$ wurde dabei $x \mapsto a$, $y \mapsto a$ gesetzt, bei der zweiten $x \mapsto a$, $y \mapsto b$, bei der dritten $x \mapsto b$, $y \mapsto a$ usw.

Erst nachdem 13 Formeln in $E(F)$ erzeugt wurden, erhalten wir alle Klauseln, die für den folgenden Unerfüllbarkeitsbeweis nötig sind:

$$\begin{tikzcd}
\{P(b), \neg Q(f(a))\} \arrow[drr, dash] & & \{Q(f(a))\} \arrow[d, dash] & & \{Q(g(b,a))\} \arrow[d, dash] & & \{\neg P(b), \neg Q(g(b,a))\} \arrow[dll, dash] \\
& & \{P(b)\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg P(b)\} \arrow[dl, dash] & & \\
& & & \emptyset & & &
\end{tikzcd}$$

Hieraus können wir zweierlei erkennen:

1) Substituiert man in einer n-elementigen Klausel aus $\mathcal{K}(F^*)$, so kann das Ergebnis weniger als n Elemente enthalten. Z. B. geht $\{P(x), \neg Q(y), \neg Q(f(a))\}$ bei der Substitution $x \mapsto b$, $y \mapsto f(a)$ über in $\{P(b), \neg Q(f(a))\}$.
2) Es kann für den Unerfüllbarkeitsbeweis nötig sein, in einer Klausel aus $\mathcal{K}(F^*)$ verschiedene Substitutionen durchzuführen.

Basierend auf diesen Vorüberlegungen sollen nun prädikatenlogische Resolutionsschritte definiert werden, wobei zuerst geeignet substituiert und dann resolviert wird. Die Substitution soll zwei Literale bis auf das Vorzeichen gleich machen.

Definition 4.47

Sei $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ eine Menge von prädikatenlogischen Literalen, d. h. von atomaren Formeln oder Negationen von atomaren Formeln.

a) Eine Substitution $s = (x_1 \mapsto t_1, \dots, x_h \mapsto t_h)$ von einer oder mehreren Variablen in $\mathcal{L}$ heißt ein **Unifikator** für $\mathcal{L}$, falls

$$L_1|_{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_h \mapsto t_h} = \dots = L_n|_{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_h \mapsto t_h}$$

gilt.

b) Ein Unifikator $s = (x_1 \mapsto t_1, \dots, x_h \mapsto t_h)$ heißt ein **allgemeinster Unifikator** für $\mathcal{L}$, falls es für jeden weiteren Unifikator s' von $\mathcal{L}$ eine Substitution s'' gibt mit $s' = s'' \circ s$.

Ein Unifikator und erst recht ein allgemeinster Unifikator braucht nicht für jede Menge von prädikatenlogischen Literalen zu existieren. Diese Existenzfrage ist effektiv entscheidbar und ein allgemeinster Unifikator ist ggf. explizit berechenbar, wie der folgende Algorithmus zeigt.

Satz 4.48: Der Unifikationsalgorithmus

Sei $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ eine nicht leere Menge von prädikatenlogischen Literalen. Betrachte die folgenden Instruktionen.

1) Setze $\widetilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L}$ und $s := \emptyset$ (leere Substitution).
2) Wiederhole die folgenden Schritte solange, bis $\#\widetilde{\mathcal{L}} = 1$ gilt. Gib dann s aus und stoppe.
3) Finde zwei Literale $L_1, L_2 \in \widetilde{\mathcal{L}}$, die sich in den vorkommenden Zeichen (d. h. den Funktionssymbolen oder Variablennamen) unterscheiden. Seien z_1 und z_2 die in L_1 bzw. L_2 ersten Zeichen mit $z_1 \neq z_2$.
4) Ist weder z_1 noch z_2 ein Variablenname, so gib „$\mathcal{L}$ ist nicht unifizierbar" aus und stoppe.
5) O. E. sei z_1 ein Variablenname. Sei t der mit dem Zeichen z_2 in L_2 beginnende Term. Kommt z_1 in t vor, so gib „$\mathcal{L}$ ist nicht unifizierbar" aus und stoppe.
6) Füge die Substitution $z_1 \mapsto t$ zu s hinzu und führe sie in den Literalen von $\widetilde{\mathcal{L}}$ durch. Fahre dann mit Schritt 2) fort.

Dies ist ein Algorithmus, der entscheidet, ob eine endliche Menge von Literalen $\mathcal{L}$ unifizierbar ist und der ggf. den allgemeinsten Unifikator s von $\mathcal{L}$ ausgibt.

Beweis Zuerst zeigen wir die *Endlichkeit* dieses Algorithmus. Bei jedem Durchlauf der Schleife in den Schritten 3)–6) wird eine Variable z_1 durch einen Term t ersetzt, in dem sie nicht vorkommt. Damit nimmt die Anzahl der in $\widetilde{\mathcal{L}}$ vorkommenden Variablen ab und die Anzahl der Schleifendurchläufe ist endlich.

Zum Beweis der *Korrektheit* des Algorithmus unterscheiden wir drei Fälle:

1) Stoppt der Algorithmus in Schritt 4), so sind L_1 und L_2 nicht unifizierbar, denn weder z_1 noch z_2 kann durch eine Substitution verändert werden.

Copyright