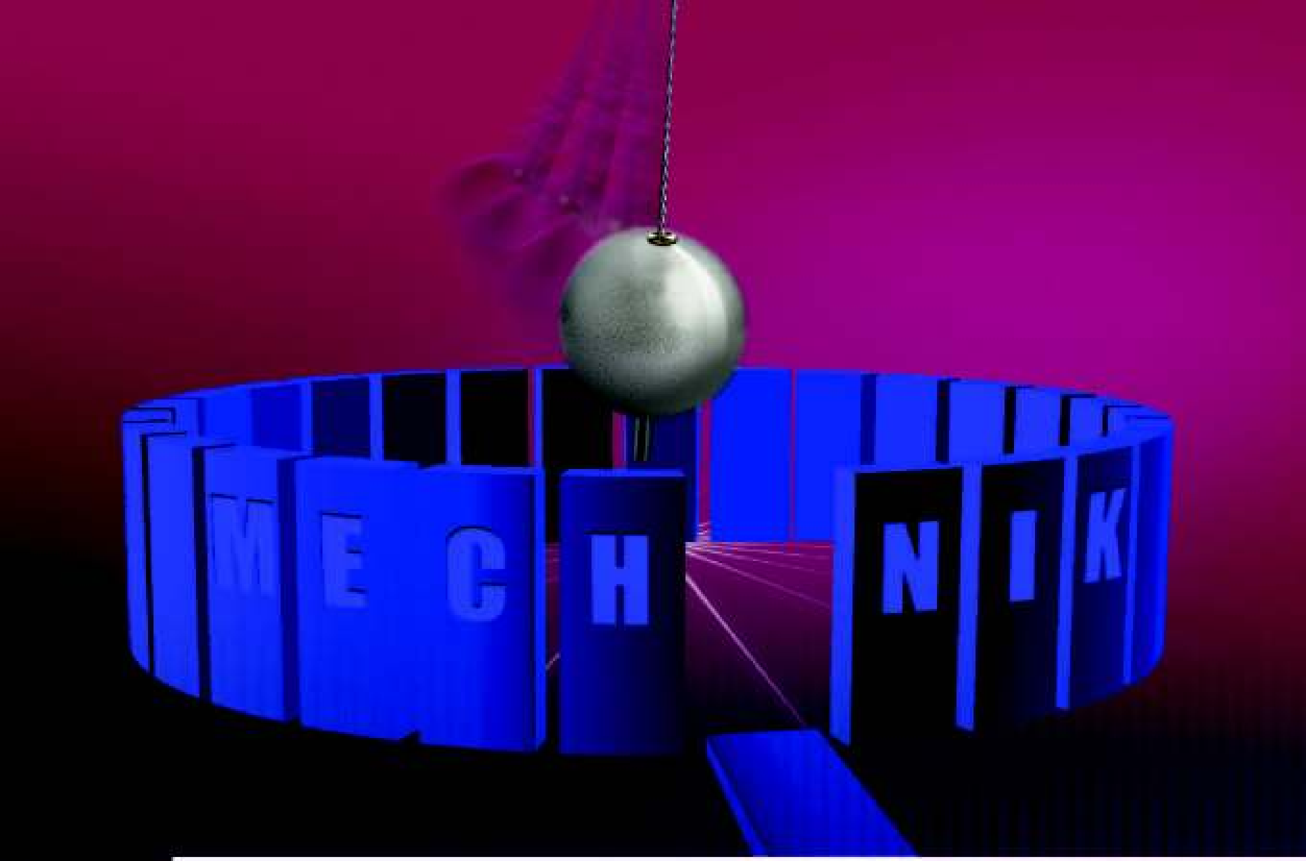

Klassische Mechanik

Das Lösungsbuch zu den Aufgaben

John R. Taylor

EXTRAS ONLINE

ALWAYS LEARNING

PEARSON

zeichnet, und ich versuche hier zu erklären, in welchem Sinn man das verstehen sollte – üblicherweise so, dass der Inhalt nicht benötigt wird, um nachfolgenden Stoff zu verstehen. Gelegentlich wird der Stoff eines „entbehrlichen“ Abschnitts später *doch* benötigt; in solchen Fällen weise ich an den entsprechenden Stellen im Handbuch darauf hin. Außerdem können einige der frühen Kapitel auch übersprungen oder nur kursorisch behandelt werden, wenn die Studenten gute Vorkenntnisse mitbringen; ich versuche, auch in diesen Fällen Orientierung zu geben.

Beim Halten der Kurse, für die dieses Buch gedacht ist (unser *junior mechanics course*, der Einführungskurs „Theoretische Mechanik“) habe ich bemerkt, dass unsere Studenten die Schauversuche vermissten, die in vielen Einführungskursen zur (Experimental-)Physik gehalten werden. Aber mir wurde auch klar, dass es eine ganze Menge möglicher Versuche gibt, die sich für das jeweilige Niveau gut eignen. Wenn ich sie bei meiner Vorlesung vorführte, waren sie in der Regel ein großer Erfolg. Daher schlage ich von Zeit zu Zeit einige solcher Versuche vor, in der Hoffnung, Dozenten auch zu eigenen Versuchen anzuregen.

Zum Schluss der Kapiteleinführungen gehe ich kurz auf die Aufgaben ein, die reizvoll und interessant sind oder die den im Lehrbuch behandelten Stoff besonders vertiefen.

Die Lösungen zu den Aufgaben benötigen keine weiteren Kommentare. Sie sind ziemlich vollständig, enthalten gegebenenfalls Abbildungen und bieten ungefähr so viele Erläuterungen, wie man sie man den Studenten mündlich auch geben würde. Die einzige Ausnahme: Um Platz zu sparen, habe ich manchmal in länglichen, aber sonst unkomplizierten Rechnungen einige Schritte ausgelassen. Beispielsweise überspringe ich oft die Einzelheiten einer Integration und erwähne nur das angewendete Verfahren (Variablenwechsel, partielle Integration usw.). Was die Anzahl der gültigen Ziffern bei Zahlenwerten angeht, verfolge ich keine konsequente Regel, versuche aber, so viele Stellen anzugeben, wie es der Aufgabe angemessen ist. Manchmal, wenn das Ergebnis an späterer Stelle noch benötigt wird, spendiere ich auch noch eine oder zwei zusätzliche Stellen. Die Bilder wurden alle mit Mathematica erstellt und sollten daher mathematisch genau sein. Teilweise wurden sie bearbeitet und sind bereits in dem kleinen Lösungsanhang des Lehrbuchs erschienen. Die weiteren Abbildungen sind nicht weiter bearbeitet; den dadurch entstehenden ästhetischen Bruch – insbesondere gibt es darin keine Unterscheidung zwischen „normalen“ Größen und Vektorgrößen, die sonst fett-kursiv gesetzt werden – bitte ich zu entschuldigen.

Zur Auswahl

Wie bereits erwähnt, enthält das Lehrbuch weit mehr Stoff, als in einem Kurs über ein Semester gelehrt werden kann; ein Dozent muss also auswählen. Die Auswahl konkret hängt zumindest teilweise von den Vorkenntnissen der Studenten ab. Das Buch wurde für eine „mittlere Mechanik“ geschrieben – die Vorlesung, die nach den Einführungskursen (*freshman physics*) und vor den Spezialkursen (*graduate*

Aufgabe 5.48 ** Wenn wir die Fourier-Reihe (5.82) mit $\cos(m\omega t)$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ multiplizieren und über eine Periode integrieren, erhalten wir

$$\int \cos(m\omega t) f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int \cos(m\omega t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,;$$

dabei laufen alle Integrale von $-\tau/2$ bis $\tau/2$. Wegen (5.106) ist jedes Integral in der zweiten Summe null. Wegen (5.105) ist jedes Integral in der ersten Summe null, außer dem Integral mit $n = m$, das gleich $\tau/2$ ist. Somit schnurrt die gesamte rechte Seite auf einen einzigen Term zusammen, nämlich

$$\int \cos(m\omega t) f(t)\,\mathrm{d}t = a_m \tau/2$$

womit wir (5.83) für a_m gezeigt haben. Um (5.84) für b_m nachzuweisen, gehen wir genauso vor, außer dass wir mit $\sin(m\omega t)$ multiplizieren.

Um schließlich a_0 zu berechnen, integrieren wir einfach die Fourier-Reihe (5.82) über eine Periode und erhalten

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,;$$

auch hier laufen alle Integrale von $-\tau/2$ bis $\tau/2$. Die Integrale über die Kosinus- bzw. Sinusfunktionen ergeben Sinus- bzw. Kosinusfunktionen und sind null, weil sowohl die Kosinus- als auch die Sinusfunktion periodisch sind. Die einzige Ausnahme ist das Integral über den Kosinus mit $n = 0$. Wegen $\cos(0) = 1$ ist dieses Integral einfach τ, und wir folgern daraus $\int f(t)\,\mathrm{d}t = a_0\tau$, womit (5.85) nachgewiesen ist.

Aufgabe 5.49 [Computer]*** Die gegebene Funktion ist gerade, d. h., $f(-t) = +f(t)$. Daher ist $\sin(m\omega t) f(t)$ ungerade, und alle Integrale in (5.84) für die Koeffizienten b_m sind null. Da $\cos(m\omega t) f(t)$ gerade ist, sind die Koeffizienten a_m nicht notwendigerweise null. Wenn Sie noch $\tau = 2$ berücksichten, sodass $\omega = \pi$ gilt, erhalten wir

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f_{\max}}{2}$$

und für $m \geq 1$

$$a_m = \frac{4}{\tau} \int_{0}^{\tau/2} \cos(m\omega t) f(t)\,\mathrm{d}t = 2f\max \int_{0}^{1} \cos(m\pi t)(1-t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Diese Integral lässt sich durch partielle Integration berechnen, wir erhalten dann

$$a_m = -\frac{2f_{\max}}{(m\pi)^2}\left[\cos(m\pi t)\right]_0^1 = \begin{cases} 0 & [m \text{ gerade}] \\ 4f_{\max}/(m\pi)^2 & [m \text{ ungerade}] \end{cases}$$

Das linke Teilbild der Abbildung zeigt die Summe der ersten beiden Terme (Konstante plus erster Kosinusterm) sowie (in grau) ie Sägezahnfunktion selbst. Das rechte Teilbild zeigt die ersten sechs Terme. Die Kurve liegt so dicht auf der Sägezahnkurve, dass man sie – außer an den Ecken – kaum auseinanderhalten kann.

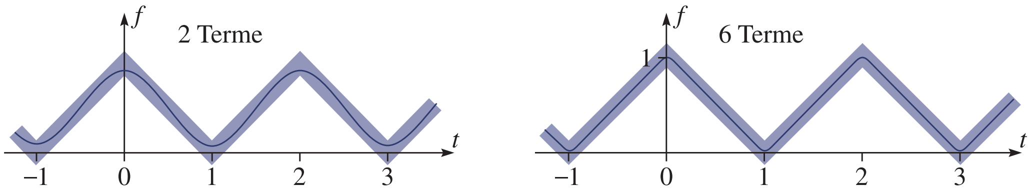

Abbildung 5.15: Zu Aufgabe 5.49

Aufgabe 5.50 [Computer]*** Die gegebene Funktion ist ungerade, d. h., $f(-t) = -f(t)$. Daher ist $\cos(m\omega t)f(t)$ ungerade, und alle Integrale in (5.83) und (5.85) für die Koeffizienten a_m sind null. Da $\sin(m\omega t)f(t)$ gerade ist, sind die Koeffizienten b_m nicht notwendigerweise null, und wir haben

$$b_m = \frac{4}{\tau}\int_0^{\tau/2} \sin(m\omega t)f(t)\,\mathrm{d}t = 2f - \max\int_0^1 \sin(m\pi t)t\,\mathrm{d}t\,.$$

(Berücksichtigen Sie $\tau = 2$, d. h., $\omega = \pi$.) Dieses Integral lässt sich durch partielle Integration leicht berechnen, und wir erhalten $b_m = -2f_{\max}(-1)^m/(m\pi)$. Die Abbildung zeigt die Summen der ersten beiden und der ersten zehn Terme der Fourier-Reihe , die Funktion $f(t)$ selbst ist in grau dargestellt.

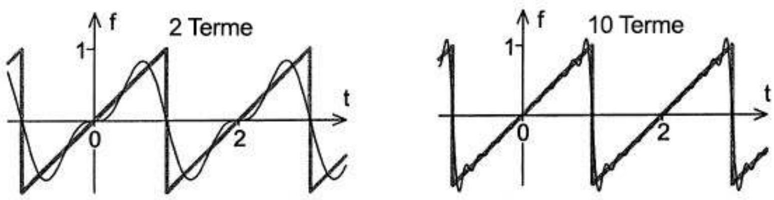

Abbildung 5.16: Zu Aufgabe 5.50

5.8 Lösung des getriebenen Oszillators mit Fourier-Reihen*

Aufgabe 5.51 ** Wenn wir die reelle Kraft $f(t) = \sum_0^\infty f_n \cos(n\omega t)$ haben und die komplexe Funktion $g(t) = \sum_0^\infty f_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}$ definieren, gilt ganz offensichtlich $f(t) = \mathrm{Re}[g(t)]$. (Ein Hauptvorteil bei der Anwendung von komplexen Funktionen ist, dass wir – wenn wir komplexe Koeffizienten in der Reihe für $g(t)$ zulassen – dann die Kosinus- *und die Sinusfunktion* aus der allgemeinen Fourier-Reihe verwenden können; wir werden hier aber nur eine Kraft behandeln, die ausschließlich Kosinusterme enthält.) Wir können nun versuchen, die komplexe Gleichung

$$Dz = \ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = g(t) \tag{vii}$$

zu lösen. Zuvor machen wir uns klar, dass – falls uns das gelingt – dann ganz offensichtlich $x(t) = \mathrm{Re}[z(t)]$ die Gleichung $Dx = f$ erfüllt. Mit anderen Worten: Der Realteil von $z(t)$ erfüllt die tatsächliche Bewegungsgleichung für das wirkliche physikalische Problem. Um die komplexe Gleichung (vii) zu lösen, können wir eine Funktion der Form $z(t) = \sum_0^\infty C_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}$ ausprobieren. Wenn wir diese Funktion in (vii) einsetzen, erhalten wir

$$Dz = \sum_0^\infty C_n(-n^2\omega^2 + 2\mathrm{i}\beta n\omega + \omega_0^2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} = \sum_0^\infty f_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}.$$

Diese Gleichung wird dann und nur dann erfüllt, wenn die einzelnen Koeffizienten auf der linken Seite gleich den entsprechenden Koeffizienten auf der rechten Seite sind, d. h.

$$C_n = \frac{f_n}{\omega_0^2 - n^2\omega^2 + 2\mathrm{i}\beta n\omega}\,.$$

Wenn wir die Koeffizienten entsprechend dieser Gleichung auswählen, erhalten wir eine komplexe Lösung z, deren Realteil $x = \mathrm{Re}(z)$ eine reelle Lösung des tatsächlichen reellen physikalischen Problems ist. Überflüssig zu erwähnen, dass dies dieselbe Lösung ist, die wir auf anderem Wege auch schon erhalten haben, nur in etwas aufgeräumterer Form.

Aufgabe 5.52 [Computer]*** Die ersten sechs Fourier-Koeffizienten, jeweils multipliziert mit 10^4, sind

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\tau = 1{,}0\,\tau_0$	63	3582	27	5	0	1
$\tau = 1{,}5\,\tau_0$	42	145	90	18	6	2
$\tau = 2{,}0\,\tau_0$	32	82	1791	40	13	6
$\tau = 2{,}5\,\tau_0$	25	59	131	98	25	11

Der Parameter β ist halb so groß wie in Beispiel 5.5; dicht bei der Resonanz sollte die Amplitude also doppelt so groß sein, doch weit weg von der Resonanz sollte sie ziemlich genau gleichgroß sein. Das wird durch die gezeigten Koeffizienten bestätigt. Für $\tau = \tau_0$ ist der Koeffizient A_1 doppelt so groß wie in Tabelle 5.1, und das gilt auch für A_2 mit $\tau = 2\tau_0$; alle anderen Koeffizenten bleiben nahezu unverändert. Dasselbe zeigt sich auch in den Kurven. Für $\tau = \tau_0$ und $\tau = 2\tau_0$ sind sie doppelt so hoch wie die in Abbildung 5.25, die Kurven für $\tau = 1{,}5\tau_0$ und $\tau = 2{,}5\tau_0$ sind unverändert.

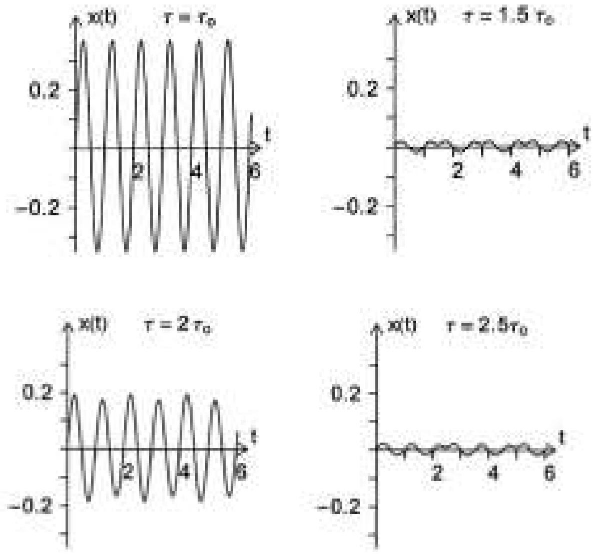

Abbildung 5.17: Zu Aufgabe 5.25

Aufgabe 5.53 [Computer]*** Aus Aufgabe 5.49 wissen wir, dass die Fourier-Reihe für $f(t)$ nur Kosinusterme enthält und dass $f_0 = \frac{1}{2}$ gilt, dagegen gilt $f_n = 4/(n\pi)^2$ für ein ungerades n, aber f_n gleich null für ein gerades n. Es folgt

$$x(t) = A_0 + \sum_{n \text{ ungerade}} A_n \cos(n\omega t - \delta_n)$$

mit $A_0 = 1/2\omega_0^2$ und $\delta_0 = 0$ [wegen der Gleichungen (5.92) und (5.93)]; für $n \geq 1$ gilt hingegen

$$A_n = \frac{4}{n^2\pi^2\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + (2\beta n\omega)^2}} \quad \text{und} \quad \delta_n = \arctan\left(\frac{2\beta n\pi}{\omega_0^2 - n^2\pi^2}\right) .$$

a) Mit $\tau_0 = 2$ und $\omega_0 = \pi$ haben die ersten vier Koeffizienten A_n (für $n = 0, 1, 2, 3$) die Werte 0,0507, 0,6450, 0 und 0,0006. (Beachten Sie den großen Wert von A_1, weil dieser Term in Resonanz ist.)
b) Mit $\tau_0 = 3$ und $\omega_0 = 2\pi/3$ erhalten wir für die ersten vier Koeffizenten A_n ($n =$

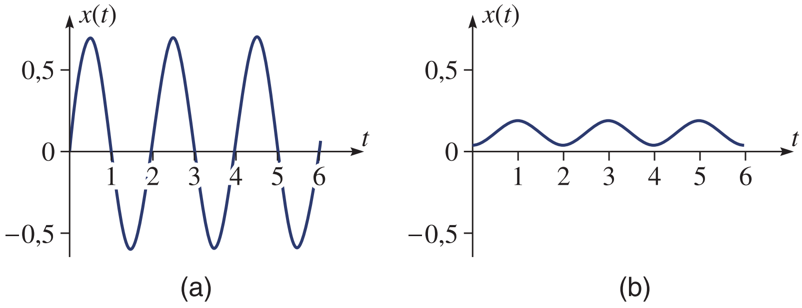

Abbildung 5.18: Zu Aufgabe 5.53

$0, 1, 2, 3$) die Werte 0,1140, 0,0734, 0 und 0,0005. (Beachten Sie, dass der konstante Term A_0 hier sicherlich nicht gegen die anderen zu vernachlässigen ist; er ist für die Verschiebung der Oszillation verantwortlich.)

5.9 Die mittlere quadratische Auslenkung; Parseval'scher Satz*

Aufgabe 5.54* Betrachten Sie den Mittelwert von $f(t)$ über ein kleineres Zeitintervall als eine Periode (beispielsweise das Intervall von 0 bis $\tau/2$). Die Werte von $f(t)$ in dieser Untermenge könnten allesamt größer als der Mittelwert über die gesamte Periode sein; dann wäre der Mittelwert über das kleine Intervall größer als der über die gesamte Periode. Betrachten Sie beispielsweise $f(t) = \sin t$, eine mit der Periode 2π periodische Funktion; ihr Mittelwert über eine gesamte Periode ist null, aber in dem Intervall zwischen 0 und π ist $f(t)$ überall größer als null, und dasselbe gilt auch für den Mittelwert (er beträgt $2/\pi$).

Betrachten Sie nun ein langes Zeitintervall von 0 bis T. Wir können nun $T = n\tau + \delta$ schreiben; dabei ist n eine große ganze Zahl, und es gilt $0 \leq \delta < \tau$. Dann haben wir

$$
\begin{aligned}
(\text{Mittelwert von 0 bis } T) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n\tau+\delta}\left(\int_0^{n\tau} + \int_{n\tau}^{n\tau+\delta}\right) f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{n\tau+\delta}\int_0^{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n\tau+\delta}\int_0^{\delta} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&\to \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } n \to \infty\,.
\end{aligned}
$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile habe ich die Periodizität von $f(t)$ ausgenützt, um beide Integrale zu vereinfachen. Der Ausdruck am Schluss ist natürlich der Mittelwert über eine Periode.

Aufgabe 5.55 ⋆⋆ Mit der trigonometrischen Identität für $\cos\theta\cos\varphi$ (im vorderen Buchdeckel) erhalten wir für den Integrand in Gleichung (5.99)

$$\begin{aligned}&\cos(n\omega t-\delta_n)\cos(m\omega t-\delta_m)\\&\quad=\tfrac{1}{2}\cos[(n+m)\omega t-(\delta_n+\delta_m)]+\tfrac{1}{2}\cos[(n-m)\omega t-(\delta_n-\delta_m)]\,.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun das Integral in Gleichung (5.99) mit I_{nm}. Für $n = m = 0$ wird dies [beachten Sie, dass nach (5.93) $\delta_0 = 0$ gilt]

$$I_{00}=\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}1\,\mathrm{d}t=\tau\,.$$

Für $n = m \neq 0$ haben wir

$$I_{nn}=\tfrac{1}{2}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}[\cos(2n\omega t-2\delta_n)+1]\,\mathrm{d}t=\tau/2\,,$$

weil das erste Integral null ist. Für $n \neq m$ schließlich haben wir

$$I_{nm}=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin(\cdots)}{n+m}+\frac{\sin(\cdots)}{n-m}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}=0\,,$$

weil beide Sinusfunktionen τ-periodisch sind. Damit ist der Beweis für Gleichung (5.99) komplett.

Nach einigen Umordnungen wird (5.98) zu

$$\langle x^2\rangle=\sum_n\sum_m A_nA_m\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos(n\omega t-\delta_n)\cos(m\omega t-\delta_m)\,\mathrm{d}t\,.$$

Mit dem Ergebnis von eben ist das Integral immer null, außer für $m = n$. Die Doppelsumme reduziert sich somit auf eine einzelne Summe mit $m = n$. Die verbleibenden Integrale sind τ (für $n = 0$) und $\tau/2$ (für $n > 0$), und damit bleibt $\langle x^2\rangle = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty A_n^2$, also genau der Parseval'sche Satz.

Aufgabe 5.56 ⋆⋆ Wenn $x(t)$ eine Fourier-Reihe vom gewünschten Typ hat, dann sieht $\langle x^2\rangle$ wie wie die Doppelreihe in Gleichung (5.98), außer dass es noch einige Terme mit Produkten zweier Sinusfunktionen sowie Terme mit einem einem Sinus und einem Kosinus gibt. Um die Summe zu berechnen, benötigen wir die „Orthogonalitätsbeziehung" (5.99) und ihre Äquivalente für Produkte von Sinusfunktionen sowie von Sinus- und Kosinusfunktionen. Mithilfe der trigonometrischen Identität für $\sin\theta\sin\varphi$ lässt sich leicht beweisen, dass $\int\sin(n\omega t-\delta_n)\sin(m\omega t-\delta_m)\,\mathrm{d}t$

ebenfalls durch (5.99) gegeben ist (außer dass das Integrals für $n = m = 0$ null ist). Ganz ähnlich können Sie mithilfe der trigonometrischen Identität für $\cos\theta \sin\varphi$ zeigen, dass alle Integrale der Form $\int \sin(n\omega t - \delta_n)\cos(m\omega t - \delta_m)\,\mathrm{d}t$ null sind. Wenn Sie diese Ergebnisse anwenden, können Sie leicht beweisen, dass der Parseval'sche Satz die Form

$$\langle x^2 \rangle = A_0^2 + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty \left(A_n^2 + B_n^2\right)$$

hat.

Aufgabe 5.57 [Computer]** Das linke Teilbild zeigt die Daten für diese Aufgabe, das rechte zeigt die Daten aus Abbildung 5.26 (allerdings hier in einem etwas veränderten Maßstab dargestellt). Beachten Sie, dass die Resonanzen mit $\beta = 0{,}1$ doppelt so hoch und nur halb so breit sind wie die die Resonanzen für $\beta = 0{,}2$.

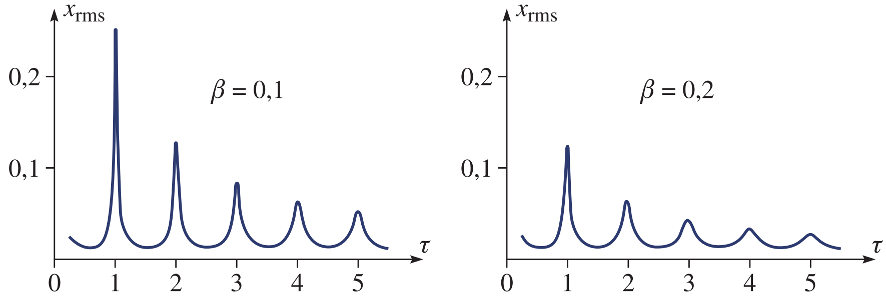

Abbildung 5.19: Zu Aufgabe 5.57

Kapitel 6

Variationsrechung

Ich habe dieses Kapitel in 2 Vorlesungen von je 50 Minuten behandelt.

Dieses Kapitel ist eines von zwei sehr kurzen Kapiteln in diesem Buch, und es ist das einzige, das sich ausschließlich einem mathematischen Verfahren widmet. Ich hatte immer geglaubt, es müsse möglich sein, die Lagrange-Gleichungen auch ohne das Hamilton'sche Prinzip herzuleiten, doch als ich es probierte, musste ich erfahren, dass das Hamilton'sche Prinzip die *bei weitem* beste Möglichkeit bietet zu beweisen, dass die Lagrange-Gleichungen in einem beliebigen Koordinatensystem gelten. Das ist in gewisser Weise bedauerlich, weil das Hamilton'sche Prinzip für die Studenten eine gewaltige intellektuelle Hürde bedeutet und zudem (außer dem Beweis der Lagrange-Gleichungen) keine einfachen und unmittelbar einleuchtenden Anwendungen hat. Dennoch gibt es uns den besten Zugang zu den Lagrange-Gleichungen und ist – natürlich – zentral für die moderne theoretische Physik. Daher mache ich ausgiebig Gebrauch von dem Prinzip, wenn ich den Lagrange-Formalismus in Kapitel 7 herleite. Weil man aber das Hamilton'sche Prinzip nicht verstehen kann, ohne die Variationsrechnung zu kennen, und weil es so aussieht, dass unsere Studenten die Variationsrechnung auch woanders nicht lernen, gebe ich in Kapitel 6 eine Einführung in dieses Thema.

Ich gehe ganz standardmäßig vor. Das zentrale Problem der Variationsrechnung ist natürlich, ein bestimmtes Kurvenintegral zu minimieren (oder, allgemeiner ausgedrückt, stationär zu machen). Ich beginne in Abschnitt 6.1 mit zwei Beispielen zu der Art von Integralen, die man minimieren möchte – den Abstand zwischen zwei Punkten und das Fermat'sche Integral für die Zeit, in der ein Lichtstrahl sich zwischen zwei Punkten ausbreitet. In Abschnitt 6.2 leite ich dann die Euler-Lagrange-Gleichung für den gesuchten stationären Weg her. Abschnitt 6.3 enthält eine Reihe von Beispiele, darunter das ein wenig ausgelutschte, aber immer wieder faszinierende Brachistochronenproblem. Abschnitt 6.4 schließlich erweitert das alles auf mehr als zwei Dimensionen, ein für viele Anwendungen in der Mechanik offenkundig notwendiger Schritt.

ALWAYS LEARNING PEARSON

Wie immer ist es entscheidend, dass die Studenten sich an einigen der Aufgaben am Kapitelende versuchen. Ich habe hier einige theoretische Entwicklungen sowie ein paar Aufgaben zusammengestellt, um die Details ergänzen, die ich im Buch weggelassen habe, die meisten sind aber einfach nur Anwendungen der Euler-Lagrange-Gleichungen. Viele dieser Aufgaben sind recht unkompliziert, einige sind aber doch ziemlich anspruchsvoll und, wie ich glaube, faszinierend (etwa Aufgabe 6.23 für die beste Flugstrecke eines Flugzeugs bei einem Scherwind.)

Lösungen für die Aufgaben zu Kapitel 6

6.1 Zwei Beispiele

Aufgabe 6.1 ⋆ Stellen Sie sich einen infinitesimalen Abschnitt eines Weges auf einer Kugel vor, in dem θ um $\mathrm{d}\theta$ und φ um $\mathrm{d}\varphi$ zunimmt. Diese Zunahme führt uns um eine Strecke $\mathrm{d}\theta$ nach „Süden“ und eine Strecke $R \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi$ nach „Osten“. Die Strecke entlang des Weges ist daher

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(R\,\mathrm{d}\theta)^2 + (R\sin\theta\, d\varphi)^2} = R\sqrt{1+\sin^2\theta\, \varphi'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Die Gesamtlänge des Weges ist daher, wie behauptet, $R\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1+\sin^2\theta\,\varphi'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$.

Aufgabe 6.2 ⋆ Stellen Sie sich einen infinitesimalen Abschnitt eines Weges auf einem Zylinder vor, in dem φ um $\mathrm{d}\varphi$ und z um $\mathrm{d}z$ zunimmt. Diese Zunahme führt uns um eine Strecke $R\,\mathrm{d}\varphi$ um den Zylinder und eine Strecke $\mathrm{d}z$ nach oben. Die Strecke entlang des Weges ist daher

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(R\,d\varphi)^2 + (dz)^2} = \sqrt{R^2\varphi'(z)^2+1}\,\mathrm{d}z\,.$$

Die Gesamtlänge des Weges ist daher $R\int\limits_{z_1}^{z_2}\sqrt{R^2\varphi'(z)^2+1}\,\mathrm{d}z$.

Aufgabe 6.3 ⋆⋆ Wir wissen bereits, dass der tatsächliche Lichtweg innerhalb eines homogenen Mediums eine Gerade ist. Daher sind die Abschnitte von P_1 bis Q und von Q bis P_2 Geradenstücke, und die entsprechenden Weglängen sind $P_1Q = \sqrt{x^2+y_1^2+z^2}$ sowie $QP_2 = \sqrt{(x-x_1)^2+y_2^2+z^2}$. Die Zeit für den gesamten Weg P_1QP_2 ist demnach

$$T = \left(\sqrt{x^2+y_1^2+z^2} + \sqrt{(x-x_1)^2+y_2^2+z^2}\right)/c\,.$$

Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!
Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: info@pearson.de

Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.**

Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

http://ebooks.pearson.de