



David J. Griffiths

# Elektrodynamik

Eine Einführung

3., aktualisierte Auflage

Aktualisierte Auflage 2015

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Die Informationen in diesem Buch werden ohne Rücksicht auf einen eventuellen Patentschutz veröffentlicht. Warennamen werden ohne Gewährleistung der freien Verwendbarkeit benutzt.

Bei der Zusammenstellung von Texten und Abbildungen wurde mit größter Sorgfalt vorgegangen. Trotzdem können Fehler nicht ausgeschlossen werden. Verlag, Herausgeber und Autoren können für fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen. Für Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler sind Verlag und Autoren dankbar.

Authorized translation from the English language edition, entitled INTRODUCTION TO ELECTRODYNAMICS, 3rd Edition by DAVID GRIFFITHS, published by Pearson Education, Inc, publishing as Addison-Wesley, Copyright © 2009. All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

GERMAN language edition published by

PEARSON EDUCATION DEUTSCHLAND GMBH, Copyright © 2011

Alle Rechte vorbehalten, auch die der fotomechanischen Wiedergabe und der Speicherung in elektronischen Medien. Die gewerbliche Nutzung der in diesem Produkt gezeigten Modelle und Arbeiten ist nicht zulässig.

Fast alle Produktbezeichnungen und weitere Stichworte und sonstige Angaben, die in diesem Buch verwendet werden, sind als eingetragene Marken geschützt. Da es nicht möglich ist, in allen Fällen zeitnah zu ermitteln, ob ein Markenschutz besteht, wird das ®-Symbol in diesem Buch nicht verwendet.

10 9 8 7 6 5 4 3 2

17 16 15

ISBN 978-3-86894-057-2

© 2011 by Pearson Deutschland GmbH

Lilienthalstraße 2, 85399 Hallbergmoos/Germany

Alle Rechte vorbehalten

[www.pearson.de](http://www.pearson.de)

Programmleitung: Birger Peil, [bpeil@pearson.de](mailto:bpeil@pearson.de)

Umschlaggestaltung: Thomas Arlt, [tarlt@adesso21.net](mailto:tarlt@adesso21.net)

Herstellung: Philipp Burkart, [pburkart@pearson.de](mailto:pburkart@pearson.de)

Übersetzer : Dr. Gunnar Radons, Mannheim

Fachlektor: Professor Dr. Ulrich Schollwöck, Universität München (LMU)

Sprachkorrektorat: Carsten Heinisch, Kaiserslautern ([www.redaktor.de](http://www.redaktor.de))

Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Druck und Verarbeitung: Drukarnia Dimograf, Bielsko-Biala

Printed in Poland

### Aufgabe 3.40

Auf einem dünnen isolierten Stab, der sich von  $z = -a$  bis  $z = +a$  erstreckt, befinden sich die unten genannten Linienladungen. Bestimmen Sie für jeden Fall den führenden Term der Multipolentwicklung des Potentials:

a.  $\lambda = k \cos(\pi z/2a),$

b.  $\lambda = k \sin(\pi z/a),$

c.  $\lambda = k \cos(\pi z/a),$

wobei  $k$  jeweils eine Konstante ist.

### • Aufgabe 3.41

Zeigen Sie, dass das von allen Ladungen im Inneren einer Kugel mit Radius  $R$  hervorgerufene *mittlere* Feld innerhalb der Kugel durch

$$\mathbf{E}_{\text{mittel}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3} \quad (3.105)$$

gegeben ist; darin ist  $\mathbf{p}$  das gesamte Dipolmoment. Es gibt verschiedene Wege, um dieses erfreulich einfache Resultat zu beweisen. Nachfolgend eine dieser Methoden:

- a. Zeigen Sie, dass das mittlere Feld aufgrund einer einzelnen Ladung  $q$  am Punkt  $\mathbf{r}$  im Inneren der Kugel dasselbe ist wie dasjenige Feld bei  $\mathbf{r}$ , das von einer gleichmäßig geladenen Kugel mit  $\rho = -q/((4/3)\pi R^3)$  hervorgerufen wird, nämlich

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} \int \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{z}} d\tau',$$

wobei  $\mathbf{z}$  der Abstandsvektor von  $\mathbf{r}$  zu  $d\tau'$  ist.

- b. Letzteres kann auch anhand des Gauß'schen Gesetzes bestimmt werden (siehe Aufgabe 2.12). Drücken Sie das Ergebnis durch das Dipolmoment von  $q$  aus.
- c. Verallgemeinern Sie das Resultat mithilfe des Superpositionsprinzips auf eine beliebige Ladungsverteilung.
- d. Und wenn Sie sich gerade mit diesem Thema beschäftigen: Zeigen Sie, dass das mittlere Feld auf der Kugel, das von allen *außerhalb* befindlichen Quellen hervorgerufen wird, dasselbe ist wie das Feld, das diese Quellen im Kugelmittelpunkt erzeugen.

### Aufgabe 3.42

- a. Berechnen Sie mit Gleichung 3.103 das mittlere elektrische Feld eines Dipols über einem kugelförmigen Volumen mit Radius  $R$ , dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt. Bestimmen Sie zuerst die Winkelintegrale.

[Anmerkung: Sie müssen vor der Integration  $\hat{\mathbf{r}}$  und  $\hat{\theta}$  durch  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  und  $\hat{\mathbf{z}}$  ausdrücken (siehe hintere innere Umschlagseiten). Falls Sie nicht nachvollziehen können, warum, lesen Sie noch einmal die Diskussion in Abschnitt 1.4.1.]

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem allgemeinen Ausdruck (Gleichung 3.105). Der Unterschied beruht hier auf dem schnellen Anwachsen des Dipolfelds bei

$r = 0$ . Das Winkelintegral ist null, das radiale Integral ist dagegen unendlich, daher haben wir eigentlich keine Ahnung, was wir mit dem Ergebnis anfangen sollen. Um dieses Dilemma zu beseitigen, nehmen wir an, dass Gleichung 3.103 *außerhalb einer winzigen Kugel mit Radius  $\varepsilon$*  gilt – der dort entstehende Beitrag zu  $E_{\text{mittel}}$  ist dann ganz *eindeutig* null, daher muss das gesamte Feld aus dem Inneren der  $\varepsilon$ -Kugel stammen.

- b. Welches Feld muss *im Inneren* der  $\varepsilon$ -Kugel herrschen, damit der allgemeine Ausdruck (Gleichung 3.105) gilt?

[*Hinweis:* Da  $\varepsilon$  beliebig klein ist, reden wir von etwas, das bei  $r = 0$  unendlich und dessen Integral über einem infinitesimalen Volumen endlich ist.]

[*Antwort:*  $-(\mathbf{p}/3\varepsilon_0)\delta^3(\mathbf{r})$ ]

[Das *wahre* Feld eines Dipols ist offenbar

$$\mathbf{E}_{\text{Dipol}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] - \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{p}\delta^3(\mathbf{r}). \quad (3.106)$$

Sie fragen sich vielleicht, wie wir den Term mit der Deltafunktion vergessen konnten, als wir das Feld in Abschnitt 3.4.4 berechnet haben. Die Antwort liegt in der Ableitung, die zu Gleichung 3.103 führte. Sie gilt überall, außer bei  $r = 0$ , allerdings hätte uns nach unseren Erfahrungen aus Abschnitt 1.5.1 bewusst sein sollen, dass die Stelle  $r = 0$  problematisch ist. Siehe dazu auch C. P. Frahm, *Am. J. Phys.* **51**, 826 (1983) oder die Arbeit von R. Estrada und R. P. Kanwal, *Am. J. Phys.* **63**, 278 (1995). Weitere Details und Anwendungen finden Sie in D. J. Griffiths, *Am. J. Phys.* **50**, 698 (1982).]

### Aufgabe 3.43

- a. Eine Ladungsverteilung  $\rho_1(\mathbf{r})$  ruft ein Potential  $V_1(\mathbf{r})$ , eine andere Ladungsverteilung  $\rho_2(\mathbf{r})$  ein Potential  $V_2(\mathbf{r})$  hervor.

[Beide Situationen müssen nicht unbedingt miteinander zu tun haben – vielleicht ist Nummer 1 eine gleichförmig geladene Kugel, und Nummer 2 ist ein planparalleler Plattenkondensator. Beachten Sie bitte, dass  $\rho_1$  und  $\rho_2$  nicht gleichzeitig anwesend sind. Wir behandeln also zwei verschiedene Probleme, von denen eines nur  $\rho_1$  enthält, und eines, in dem nur  $\rho_2$  zu finden ist.]

Beweisen Sie den **Green'schen Reziprozitätssatz**:

$$\int_{\text{ganzer Raum}} \rho_1 V_2 \, d\tau = \int_{\text{ganzer Raum}} \rho_2 V_1 \, d\tau.$$

[*Hinweis:* Berechnen Sie  $\int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \, d\tau$  mit zwei Methoden. Schreiben Sie erst  $\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1$  und wenden Sie die partielle Integration an, um die Ableitung nach  $\mathbf{E}_2$  zu überführen. Danach nehmen Sie  $\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2$  und überführen die Ableitung nach  $\mathbf{E}_1$ .]

- b. Nehmen Sie nun an, Sie hätten zwei voneinander getrennte Leiter (Abbildung 3.41). Wenn Sie Leiter  $a$  mit einer Ladung  $Q$  aufladen (und  $b$  ungeladen bleibt), dann nennen wir das resultierende Potential von  $b$  beispielsweise  $V_{ab}$ . Wenn Sie andererseits dieselbe Ladung  $Q$  auf Leiter  $b$  aufbringen (und  $a$  ungeladen bleibt), dann ergibt sich das Potential von  $a$  zu  $V_{ba}$ . Zeigen Sie mithilfe des

Green'schen Reziprozitätssatzes, dass  $V_{ab} = V_{ba}$  (eigentlich ein erstaunliches Resultat, da wir keinerlei Annahmen über die Formen oder die Anordnung der Leiter getroffen haben.)

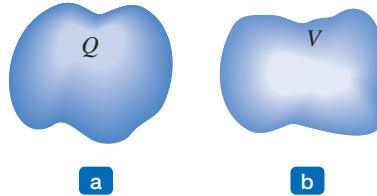


Abbildung 3.41

**Aufgabe 3.44**

Lösen Sie mithilfe des Green'schen Reziprozitätssatzes (Aufgabe 3.43) die beiden folgenden Aufgaben für je zwei verschiedene Anordnungen.

[Hinweis: Benutzen Sie für die Verteilung 1 die beschriebene Anordnung. Entfernen Sie aber bei Verteilung 2 die Ladung  $q$  und setzen Sie einen der Leiter auf das Potential  $V_0$ .]

- a. Beide Platten eines planparallelen Kondensators sind geerdet, und eine Punktladung  $q$  wird in der Entfernung  $x$  von Platte 1 zwischen sie gebracht. Der Abstand der Platten ist  $d$ . Bestimmen Sie die induzierte Ladung auf jeder Platte.  
[Antwort:  $Q_1 = q(x/d - 1)$ ;  $Q_2 = -qx/d$ ]
- b. Zwei konzentrische leitende Kugelschalen (mit Radien  $a$  und  $b$ ) sind geerdet, und eine Punktladung  $q$  wird beim Radius  $r$  zwischen sie gebracht. Bestimmen Sie die auf jeder Kugelschale induzierte Ladung.

**Aufgabe 3.45**

- a. Zeigen Sie, dass der Quadrupol-Term der Multipolentwicklung folgendermaßen formuliert werden kann:

$$V_{\text{Quadrupol}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^3} \sum_{i,j=1}^3 \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}$$

(in der Schreibweise von Gleichung (1.31)) mit

$$Q_{ij} \equiv \int [3r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij}] \rho(\mathbf{r}') d\tau' .$$

Hierbei ist

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

das **Kronecker-Delta**, und  $Q_{ij}$  ist das Quadrupolmoment der Ladungsverteilung.

Beachten Sie die Hierarchie:

$$V_{\text{Monopol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}; \quad V_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \hat{r}_i p_i}{r^2};$$

$$V_{\text{Quadrupol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{1}{2} \sum \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}}{r^3}; \quad \dots$$

Das Monopolmoment ( $Q$ ) ist ein Skalar, das Dipolmoment ( $\mathbf{p}$ ) ist ein Vektor, das Quadrupolmoment ( $Q_{ij}$ ) ist ein Tensor zweiter Stufe usw.

- b. Bestimmen Sie alle neun Komponenten von  $Q_{ij}$  für die in Abbildung 3.30 dargestellte Konfiguration (dabei soll das Quadrat die Seitenlänge  $a$  haben und sich so in der  $x$ - $y$ -Ebene befinden, dass sein Mittelpunkt im Ursprung liegt.)
- c. Zeigen Sie, dass das Quadrupolmoment von der Position des Ursprungs unabhängig ist, wenn sowohl das Monopol- als auch das Dipolmoment verschwinden. (Dies gilt für alle Stufen der Hierarchie – das niedrigste von null verschiedene Moment ist immer vom Ursprung unabhängig.)
- d. Wie würden Sie das **Oktopolmoment** definieren? Drücken Sie den Oktopol-Term der Multipolentwicklung durch das Oktopolmoment aus.

### Aufgabe 3.46

In Beispiel 3.8 haben wir das elektrische Feld außerhalb eines kugelförmigen Leiters (mit Radius  $R$ ) bestimmt, der sich in einem gleichförmigen äußeren Feld  $\mathbf{E}_0$  befindet. Lösen Sie das Problem mithilfe der Methode der Spiegelladungen und überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis mit Gleichung 3.76 übereinstimmt.

[*Hinweis:* Gehen Sie wie in Beispiel 3.2 vor, setzen Sie aber die Ladung  $-q$  diametral gegenüber  $q$ . Lassen Sie  $a \rightarrow \infty$  gehen und halten Sie  $(1/4\pi\epsilon_0)(2q/a^2) = -E_0$  konstant.]

### ! Aufgabe 3.47

Nehmen Sie an, dass für die unendliche rechteckige Röhre in Beispiel 3.4 das Potential am Boden ( $y = 0$ ) und den beiden Seiten ( $x = \pm b$ ) null ist. Das Potential auf der Oberseite ( $y = a$ ) ist eine von null verschiedene Konstante  $V_0$ .

[*Anmerkung:* Dies ist eine Umkehrung von Aufgabe 3.14b. Gehen Sie von einem Ansatz wie in Beispiel 3.4 aus und verwenden Sie sinusförmige Funktionen für  $y$  und hyperbolische für  $x$ . Es handelt sich um einen unüblichen Fall, in dem  $k = 0$  enthalten sein muss. Bestimmen Sie zuerst die allgemeine Lösung für Gleichung 3.26 mit  $k = 0$ . Eine weitergehende Diskussion finden Sie in S. Hassani, *Am. J. Phys.* **59**, 470 (1991).]

[*Antwort:*

$$V_0 \left( \frac{y}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh(n\pi x/a)}{n \cosh(n\pi b/a)} \sin(n\pi y/a) \right).$$

Alternativ erhalten Sie mit sinusförmigen Funktionen in  $x$  und hyperbolischen Funktionen in  $y$

$$-\frac{2V_0}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh(\alpha_n y)}{\alpha_n \sinh(\alpha_n a)} \cos(\alpha_n x) \quad \text{mit} \quad \alpha_n \equiv (2n-1)\pi/2b.]$$

**! Aufgabe 3.48**

- a. Eine lange Metallröhre mit quadratischem Querschnitt (und Seitenlänge  $a$ ) wird auf drei Seiten geerdet, während die vierte (die vom Rest isoliert ist) auf einem konstanten Potential  $V_0$  gehalten wird. Bestimmen Sie die Nettoladung pro Einheitslänge auf der Seite, die  $V_0$  gegenüberliegt.

[Hinweis: Benutzen Sie Ihr Resultat aus Aufgabe 3.14 oder 3.47.]

- b. Eine lange Metallröhre mit kreisförmigem Querschnitt (und Radius  $R$ ) ist (der Länge nach) in vier gleiche Abschnitte untergliedert. Drei von ihnen sind geerdet, der vierte wird auf dem konstanten Potential  $V_0$  gehalten. Bestimmen Sie die Nettoladung pro Einheitslänge auf dem Abschnitt, der  $V_0$  gegenüberliegt.

[Antwort für (a) und (b):  $\lambda = -(\epsilon_0 V_0/\pi) \ln 2$ ]<sup>13</sup>

**Aufgabe 3.49**

Ein idealer elektrischer Dipol befindet sich im Ursprung und zeigt, wie in Abbildung 3.36, in  $z$ -Richtung. Eine elektrische Ladung befindet sich anfänglich in einem Punkt der  $x$ - $y$ -Ebene in Ruhe. Zeigen Sie, dass der Dipol auf einem halbkreisförmigen Bogen vor und zurück schwingt, als ob er sich auf einem Pendel befinden würde, das im Ursprung aufgehängt ist.

[Dieses nette Resultat finden Sie bei R. S. Jones, *Am. J. Phys.* **63**, 1042 (1995).]

<sup>13</sup> Hierbei handelt es sich um Spezialfälle des **Thomson-Lampard-Satzes**; siehe J. D. Jackson, *Am. J. Phys.* **67**, 107 (1999).

# Elektrische Felder in Materie

4

<b>4.1</b>	<b>Polarisation</b> .....	222
<b>4.2</b>	<b>Das Feld eines polarisierten Objekts</b> .....	229
<b>4.3</b>	<b>Die dielektrische Verschiebung</b> .....	238
<b>4.4</b>	<b>Lineare Dielektrika</b> .....	244

ÜBERBLICK



## 4.1 Polarisation

### 4.1.1 Dielektrika

In diesem Kapitel werden wir uns mit elektrischen Feldern in Materie befassen. Materie gibt es selbstverständlich in vielen verschiedenen Variationen – Festkörper, Flüssigkeiten, Gase, Metalle, Holz, Gläser usw. –, und alle diese Substanzen reagieren in unterschiedlicher Weise auf elektrostatische Felder. Dennoch gehören die meisten Objekte des Alltags (zumindest in guter Näherung) einer von zwei Klassen an: **Leiter** und **Isolatoren** (bzw. **Dielektrika**). Leiter haben wir bereits behandelt. Es sind Substanzen mit einem „unbegrenzten“ Vorrat an Ladungsträgern, die frei in der Substanz herumwandern können. In der Praxis bedeutet das üblicherweise, dass viele der Elektronen (in einem typischen Metall ein oder zwei pro Atom) nicht an irgendeinen Atomkern gebunden sind, sondern sich frei bewegen können. In Dielektrika sind dagegen *alle Ladungen an bestimmte Atome oder Moleküle gebunden*. Sie werden sozusagen an der kurzen Leine gehalten und können sich nur *innerhalb* des Atoms oder Molekül geringfügig bewegen. Solche mikroskopischen Verschiebungen haben nicht so drastische Auswirkungen wie die vollständige Neuordnung von Ladungen in einem Leiter. Der Gesamteffekt aller Bewegungen bestimmt aber das charakteristische Verhalten dielektrischer Materialien. Im Grunde genommen gibt es zwei wichtige Wege, durch die elektrische Felder die Ladungsverteilung eines dielektrischen Atoms oder Moleküls verzerren können: *Dehnung* und *Rotation*. In den beiden folgenden Abschnitten werde ich diese Prozesse diskutieren.

### 4.1.2 Induzierte Dipole

Was geschieht mit einem neutralen Atom, das in ein elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  gebracht wird? Vermutlich denken Sie zunächst: „Gar nichts – da das Atom nicht geladen ist, hat das Feld keine Auswirkungen auf das Atom.“ Das stimmt aber nicht. Obwohl das Atom als Ganzes elektrisch neutral ist, besteht es *doch* aus einem positiv geladenen Zentrum (dem Kern), der von einer negativ geladenen Elektronenwolke umgeben ist. Diese beiden geladenen Gebiete innerhalb des Kerns werden durchaus vom Feld beeinflusst: Der Kern wird in Richtung des Felds verschoben, die Elektronen in entgegengesetzter Richtung. Wenn das Feld stark genug ist, kann es das Atom im Prinzip auseinanderreißen und so „**ionisieren**“ (die Substanz wird dann zu einem Leiter.) Bei schwächeren Feldern wird jedoch bald ein Gleichgewicht erreicht, denn sobald das Zentrum der Elektronenwolke nicht mehr im Kern liegt, entsteht eine Anziehungskraft zwischen diesen positiven und negativen Ladungen, die das Atom zusammenhalten. Die beiden entgegengesetzten Kräfte – das Feld  $\mathbf{E}$ , welches Elektronen und Kern auseinanderzieht, und ihre gegenseitige Anziehungskraft, die sie zusammenhält – gleichen sich aus und hinterlassen ein **polarisiertes** Atom, bei dem die positive Ladung geringfügig gegenüber der negativen verschoben ist. Das Atom weist nun ein winziges Dipolmoment  $\mathbf{p}$  auf, das in *dieselbe Richtung* weist wie  $\mathbf{E}$ . Üblicherweise ist dieses induzierte Dipolmoment ungefähr dem Feld proportional (sofern letzteres nicht zu stark ist):

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} . \quad (4.1)$$

Die Proportionalitätskonstante wird als **atomare Polarisierbarkeit** bezeichnet. Ihr Wert hängt von der genauen Struktur des betrachteten Atoms ab. In Tabelle 4.1 sind einige experimentell bestimmte atomare Polarisierbarkeiten aufgelistet.

H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K	Cs
0,667	0,205	24,3	5,60	1,76	0,396	24,1	1,64	43,4	59,6

Tabelle 4.1: Atomare Polarisierbarkeit ( $\alpha/4\pi\epsilon_0$  in Einheiten von  $10^{-30}\text{m}^3$ ). Quelle: Handbook of Chemistry and Physics, 78th ed. (Boca Raton: CRC-Press, Inc. 1997)

### Beispiel 4.1: Atomare Polarisierbarkeit

Nach einem einfachen Modell besteht ein Atom aus einem punktförmigen Kern ( $+q$ ), umgeben von einer gleichmäßig geladenen kugelförmigen Wolke ( $-q$ ) mit Radius  $a$  (Abbildung 4.1). Berechnen Sie die atomare Polarisierbarkeit eines solchen Atoms.

#### Lösung:

In Anwesenheit eines äußeren Felds  $\mathbf{E}$  wird der Kern, wie in Abbildung 4.2 dargestellt, geringfügig nach rechts verschoben, die Elektronenwolke hingegen nach links. (Weil die tatsächlichen Verschiebungen, wie Sie in Aufgabe 4.1 noch feststellen werden, extrem klein sind, dürfen wir annehmen, dass die Elektronenwolke ihre Kugelform beibehält.) Nehmen wir an, das Gleichgewicht wird erreicht, sobald der Kern gegenüber dem Kugelmittelpunkt um den Abstand  $d$  verschoben ist. An diesem Punkt gleicht das äußere Feld, das den Kern nach rechts verschiebt, genau das innere Feld aus, das ihn nach links verschiebt:  $E = E_e$ . Dabei ist  $E_e$  das von der Elektronenwolke hervorgerufene Feld. Nun beträgt das Feld in der Entfernung  $d$  vom Mittelpunkt einer gleichmäßig geladenen Kugel (gemäß Aufgabe 2.1)

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3}.$$

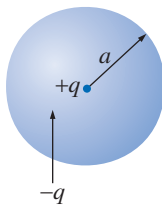


Abbildung 4.1

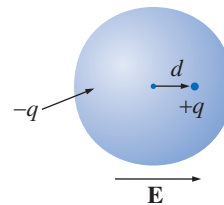


Abbildung 4.2

Im Gleichgewicht ist daher:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3}, \quad \text{oder} \quad p = qd = (4\pi\epsilon_0 a^3) E.$$

## Beispiel 4.1 (Fortsetzung)

Die atomare Polarisierbarkeit ist somit

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 = 3\epsilon_0 v, \quad (4.2)$$

wobei  $v$  das Volumen des Atoms darstellt. Obwohl dieses Atommodell ziemlich grob ist, ist das Ergebnis (Gleichung 4.2) gar nicht so schlecht – für viele einfache Atome ist es bis auf einen Faktor von etwa vier genau.

Bei Molekülen ist die Situation nicht ganz so einfach, weil sie sich oft in manche Richtungen einfacher polarisieren lassen als in andere. Kohlendioxid (Abbildung 4.3) hat beispielsweise eine Polarisierbarkeit von  $4,5 \cdot 10^{-40} \text{C}^2 \text{m/N}$ , sofern das Feld in Richtung der Molekülachse liegt, aber nur  $2 \cdot 10^{-40} \text{C}^2 \text{m/N}$  bei Feldern senkrecht dazu. Steht das Feld in irgendeinem *Winkel* zur Achse, müssen Sie es in eine parallele und eine senkrechte Komponente aufteilen und jede mit der entsprechenden Polarisierbarkeit multiplizieren:

$$\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}.$$

In diesem Fall muss das induzierte Dipolmoment nicht einmal in derselben *Richtung* wie  $\mathbf{E}$  verlaufen. Darüber hinaus ist  $\text{CO}_2$  für ein Molekül relativ einfach gebaut, da sich die Atome in einer geraden Linie anordnen. Bei einem völlig asymmetrischen Molekül wird Gleichung 4.1 durch die allgemeingültigste Beziehung zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{p}$  ersetzt:

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ p_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ p_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \end{aligned} \quad (4.3)$$

Diese Gruppe der neun Konstanten  $\alpha_{jj}$  bildet den **Polarisationstensor** des Moleküls. Ihre tatsächlichen Werte hängen nur von der Orientierung der von Ihnen gewählten Achsen ab. Allerdings ist es immer möglich, „Haupt“achsen so zu wählen, dass alle Terme abseits der Diagonalen ( $\alpha_{xy}$ ,  $\alpha_{zx}$ , usw.) verschwinden, sodass nur noch drei von null verschiedene Polarisierbarkeiten übrig bleiben, nämlich  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$ , und  $\alpha_{zz}$ .

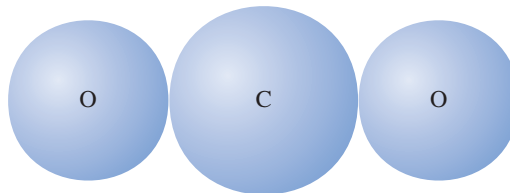


Abbildung 4.3

### ■ Aufgabe 4.1

Ein Wasserstoffatom (dessen Bohr'scher Radius etwa ein halbes Angström beträgt), befindet sich zwischen zwei Metallplatten, deren Abstand 1 mm beträgt und die mit den Klemmen einer 500-V-Batterie verbunden sind. Welchem Anteil des Atomradius entspricht in etwa der Betrag der Verschiebung  $d$ ? Bestimmen Sie die Spannung, die bei dieser Anordnung notwendig wäre, um das Atom zu ionisieren.

[Benutzen Sie die  $\alpha$ -Werte aus Tabelle 4.1. *Moral*: Selbst auf atomarer Ebene betrachten wir hier nur *winzigste* Verschiebungen.]

### ■ Aufgabe 4.2

Gemäß der Quantenmechanik besitzt die Elektronenwolke eines Wasserstoffatoms im Grundzustand die Ladungsdichte

$$\rho(r) = \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a}.$$

Hierbei ist  $q$  die Elektronenladung, und  $a$  ist der Bohr'sche Radius. Bestimmen Sie die atomare Polarisierbarkeit dieses Atoms.

[*Hinweis*: Bestimmen Sie zuerst das elektrische Feld  $E_e(r)$  der Elektronenwolke und entwickeln Sie danach den Exponentialterm unter der Annahme  $r \ll a$ . Einen anspruchsvolleren Ansatz enthält W. A. Bowers, *Am. J. Phys.* **54**, 347 (1986).]

### ■ Aufgabe 4.3

Nach Gleichung 4.1 ist das induzierte Dipolmoment eines Atoms proportional zum äußeren Feld. Dies ist allerdings nur „Pi mal Daumen“ und keineswegs ein grundlegendes Gesetz. Zumindest theoretisch lassen sich einfach Ausnahmen konstruieren. Nehmen Sie beispielsweise an, die Ladungsdichte der Elektronenwolke wäre bis zu einem Radius  $R$  proportional zur Entfernung vom Zentrum. Zu welcher Potenz von  $E$  wäre  $p$  in diesem Fall proportional? Bestimmen Sie die Bedingung für  $\rho(r)$ , damit Gleichung 4.1 auch im Grenzfall schwacher Felder gilt.

### ■ Aufgabe 4.4

Eine Punktladung  $q$  befindet sich in großer Entfernung  $r$  von einem neutralen Atom mit Polarisierbarkeit  $\alpha$ . Bestimmen Sie die zwischen ihnen herrschende Anziehungskraft.

## 4.1.3 Ausrichtung polarer Moleküle

Das in Abschnitt 4.1.2 diskutierte neutrale Atom hat zu Beginn kein Dipolmoment –  $\mathbf{p}$  wurde durch das angelegte Feld *induziert*. Einige Moleküle besitzen jedoch von vornherein ein permanentes Dipolmoment. Im Wassermolekül tendieren die Elektronen beispielsweise dazu, sich um das Sauerstoffatom anzusammeln (Abbildung 4.4).

# Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: [info@pearson.de](mailto:info@pearson.de)

## Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.**

## Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

**<http://ebooks.pearson.de>**