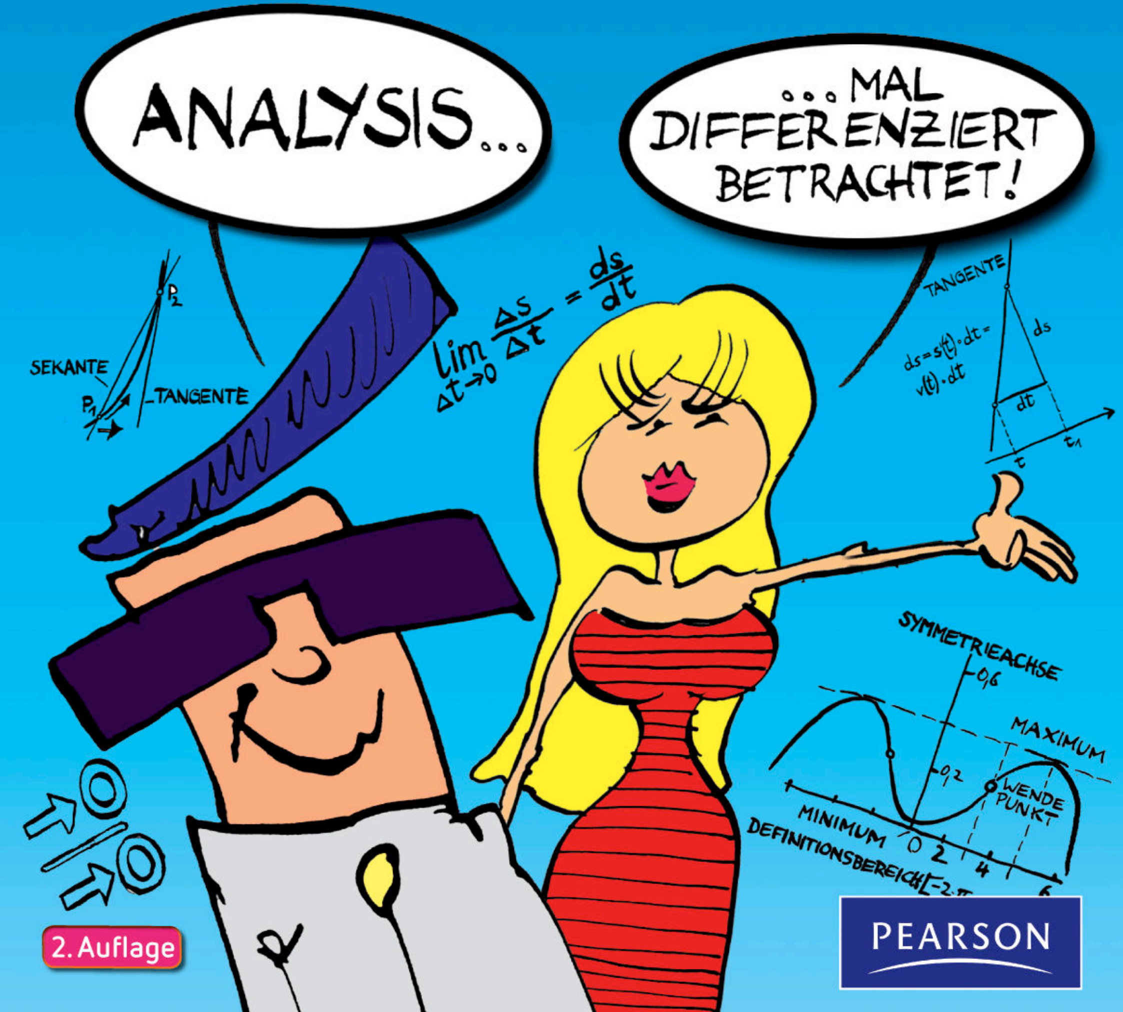
HEINZ PARTOLL, IRMGARD WAGNER
ILLUSTRIERT VON PETER FEJES

MATHE macchiato ANALYSIS

Fit für's Abi



2. Auflage

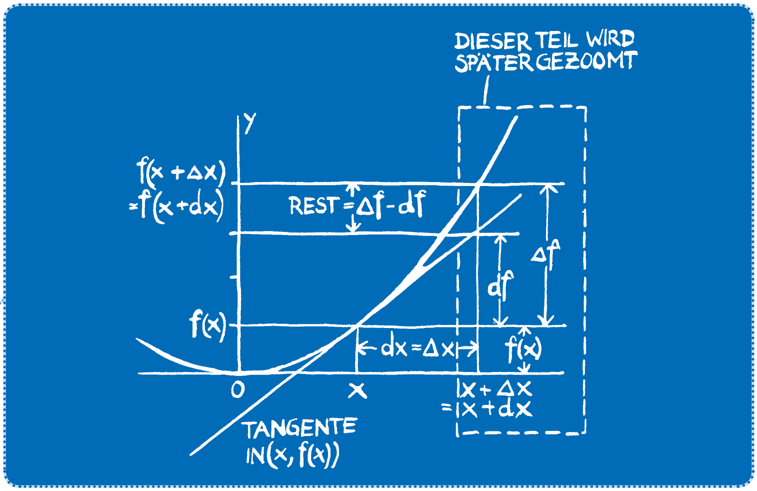
PEARSON

Inhalt

Die Gleichung $df = f'(x) \cdot dx$ – die wir im mikroskopischen Bereich schon kennen – hat auch eine makroskopische Interpretation.

Sehen wir uns die Quotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ und $\frac{df}{dx}$ einmal genauer an, wenn wir $\Delta x = dx$ kleiner und kleiner werden lassen.

$\frac{df}{dx}$ behält immer den Wert $f'(x)$ – die Steigung der Tangente – bei, egal wie groß oder klein dx ist. Ganz anders zeigt $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ an jeder Stelle einen anderen Wert. Erst wenn $\Delta x = dx$ null wird, bekommt auch dieser Quotient den Wert $f'(x)$.



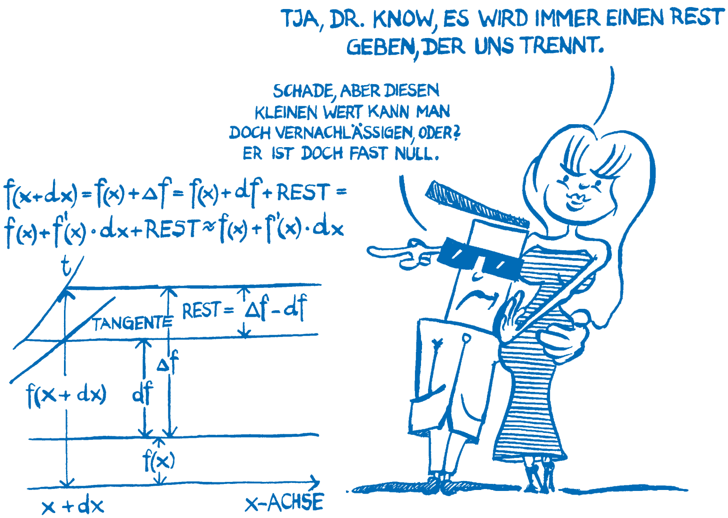
Während $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ erst beim Grenzübergang mit der Ableitung identisch ist, wenn Δx null wird, sehen wir die Ableitung $f'(x)$ beim Quotienten $\frac{df}{dx}$ immer, weil wir hier die Tangente betrachten. Das berechtigt uns, $\frac{df}{dx}$ als Quotienten aufzufassen und die Gleichung $\frac{df}{dx} = f'(x)$ aufzulösen zu

$$\boxed{df = f'(x) \cdot dx}$$

Wir können diese Formel verwenden, um eine unbekannte Ableitung $f'(x)$ zu bestimmen.

Wenn es uns gelingt, den **linearen Funktionszuwachs** df längs der Tangente durch dx auszudrücken oder geometrisch darzustellen, dann haben wir eine neue Methode zur Herleitung von Ableitungsfunktionen gefunden, weil der Faktor, der bei dx steht, die Ableitung sein muss.

Anhand der Zeichnung bauen wir eine alternative Formel zusammen, die beim Berechnen von Ableitungen gute Dienste tut. An der Stelle $x + dx$ können wir den Funktionswert $f(x+dx)$ auf mehrere Arten zusammenfügen:



Der letzte Teil der oben zitierten Formel zeigt uns zwei Dinge:

1. Der Rest ist völlig uninteressant, wenn es nur um die Bestimmung der Ableitung $f'(x)$ geht, da er hier null wird.

2. Da der Rest = $\Delta f - df$ verschwindet, wenn dx gegen null geht, kann diese Formel Nachbarwerte von $f(x)$ abschätzen, wenn sie sich nicht zu weit entfernen, wenn also dx klein bleibt.

Wenn wir etwa $f(x) = x^2$ wählen, dann gilt nach der binomischen Formel für $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$:

$$f(x+dx) = (x+dx)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot dx + dx^2$$

Bei dx steht als **linearer Zuwachsfaktor** die Funktion $2 \cdot x$ – sie ist also die Ableitung von x^2, die wir bereits kennen. Diese Methode zeigt aber, wie wir sie hätten auch gewinnen können.

dx^2 lässt sich wie folgt deuten.

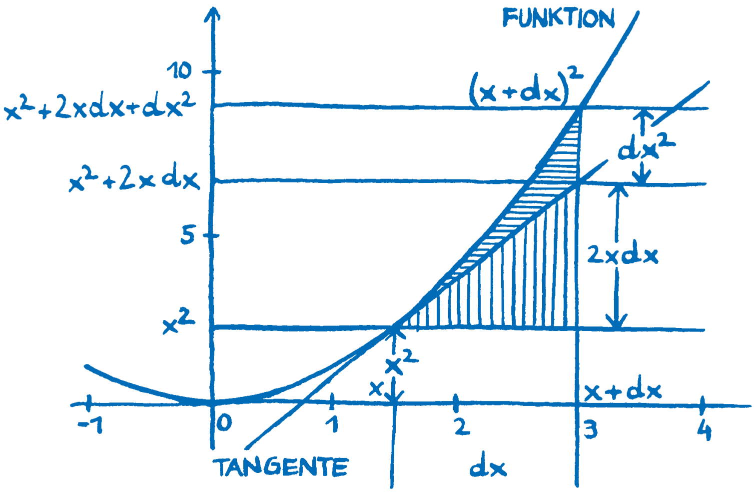
Während

$f'(x) \cdot dx = 2 \cdot x \cdot dx$

der tangentiale (lineare) Zuwachs bis zur Stelle $x + dx$ ist, zeigen höhere Potenzen von dx, also z.B.

dx^2

den „krummlinigen" – in diesem Fall den **quadratischen** – **Zuwachs** dx^2 an. Dieser Teil ist der „Rest" in unserer vorhergehenden Betrachtung.



Wenn wir also auf diese Art die Ableitung einer Funktion finden wollen, müssen wir – wie bereits festgestellt – den „linearen" Zuwachs bestimmen – also alles, was beim dx steht. Den Rest, also den **„krummlinigen" Zuwachs** – das ist alles was bei $(dx)^2$, $(dx)^3$, ... steht –, dürfen wir einfach ignorieren.

Die Ableitung des Produktes und des Quotienten

Irgendwo ist immer ein Haken

Produkt und Quotient haben es in sich beim Differenzieren. Hier werden die Rechnungen lang und es passieren viele Fehler.

Das Produkt wird beim Ableiten zu einer Summe von Produkten. Beim Quotienten entsteht im Zähler eine Differenz von Produkten. Hier gibt es viele Haken, an denen man hängen bleiben kann: die Klammer um die Summe vergessen, bei der Differenz die Glieder verwechseln, die Übersicht verlieren, da so viele Regeln jetzt ineinander greifen ... Mensch Mathe, hier muss viel trainiert werden!

Zunächst mal eine Erklärung, wie diese Regeln (Haken) entstehen:

Die Produktregel

Wieder leistet die Formel $f(x+dx) \approx f(x)+f'(x) \cdot dx$ wertvolle Dienste, wenn wir der Ableitung des Produkts zweier Funktionen

$F(x) = f(x) \cdot g(x)$

auf die Schliche kommen wollen.

Wir wenden diese Formel sowohl auf $F(x)$ als auch auf die Faktoren $f(x)$ und $g(x)$ an. Für $F(x)$ ergibt die Formel:

$$F(x+dx) \approx F(x) + F'(x) \cdot dx$$

Für das Produkt $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ gilt:

$$F(x+dx) = f(x+dx) \cdot g(x+dx) \approx (f(x) + f'(x) \cdot dx) \cdot (g(x) + g'(x) \cdot dx)$$

Nach dem Auflösen des geklammerten Ausdrucks, zeigt uns der Vergleich der beiden Darstellungen Folgendes:

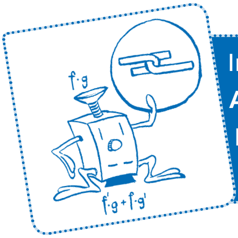
$$\underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{F(x)} + \underbrace{(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) \cdot dx}_{F'(x) \cdot dx} + \underbrace{f'(x) \cdot g'(x) \cdot dx^2}_{Rest (quadratischer Zuwachs)}$$

Der Rest darf als quadratischer Zuwachs (laut Dr. Know) ignoriert werden, wenn es nur um das Bestimmen der Ableitung geht. Diese zeigt sich nämlich – wie wir wissen – als Faktor des linearen dx. Daher gilt:

$$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Ersetzen wir links noch $F'(x)$ durch $(f(x) \cdot g(x))'$, so ergibt sich die **Produktregel** der Differenziation:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$



In Worten (wenn die Funktionen nicht f und g heißen): Die **Ableitung eines Produkts** ist die Summe der Ableitungen der Faktoren jeweils multipliziert mit dem undifferenzierten anderen Faktor.

Die Quotientenregel

Ein Quotient zweier Funktionen

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

kann natürlich auch als Gleichung so geschrieben werden:

$$\frac{f}{g} \cdot g = f$$

Dieser Trick erleichtert es uns, eine Regel für die Ableitung des Quotienten zu finden.

Wir differenzieren die Gleichung:

$$\left(\frac{f}{g}\cdot g\right)' = f'$$

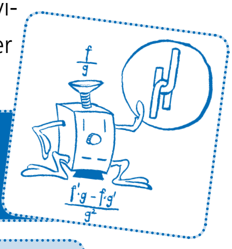
Werten wir den linken Ausdruck nach der Produktregel aus, so ergibt sich:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'\cdot g+\frac{f}{g}\cdot g' = f'$$

Jetzt können wir den Trick zu Ende bringen. Es ist nur mehr die Gleichung aufzulösen, in der links die Ableitung des Quotienten übrig bleibt.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'\cdot g = f' - \frac{f}{g}\cdot g' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g}$$

Jetzt noch auf beiden Seiten durch g dividieren und wir erhalten die **Quotientenregel** in der üblichen Form (wir dürfen durch g dividieren, da der Quotient nur dann definiert ist, wenn der Nenner nicht null ist):



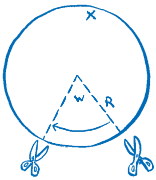
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g\ x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

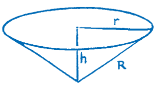
	Produktregel, zwei Faktoren	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) =$ $= f(x)\cdot g(x)\cdot(\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)})$
	Produktregel, drei Faktoren	$(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))' =$ $= f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\cdot(\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}+\frac{h'(x)}{h(x)})$
	Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Ohne Training – Weiterlesen auf eigene Gefahr! Die Haken lassen sich nur mit Training umgehen. In unseren Aufgaben helfen die Piktogramme, die Übersicht zu behalten. Das Training werden wir im folgenden Beispiel brauchen.

Großmutter hat keine Filtertüten mehr. Sie schneidet ein rundes Filterblatt (Radius R) ein und lässt den Sektor mit dem Mittelpunktswinkel w überlappen. Dadurch entsteht ein Papiertrichter in Form eines Kegelmantels, den sie als Filter verwenden kann.

Während die Flüssigkeit sehr langsam durchsickert, überlegt sie: „Wie viel muss ich überlappen bzw. nicht überlappen lassen, damit der Kegel möglichst viel Flüssigkeit aufnimmt. Dann kann ich meine eigenen Filtertüten produzieren?"





Offensichtlich sucht die Großmutter einen Maximalwert des Kegelvolumens.

Die **Zielfunktion** für dieses Extremwertproblem lautet:

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Da w bzw. x – der Ergänzungswinkel auf $2 \cdot \pi$ – unsere Variablen sind, die die Großmutter beeinflussen kann, müssen wir die Unbekannten r und h durch w oder – einfacher – durch x ausdrücken. Wir müssen also **Nebenbedingungen** finden!

Der Bogen, der zum Winkel x gehört, ist $R \cdot x$. Dieses Bogenstück entspricht aber zugleich dem Umfang des Basiskreises des Kegels, also $2 \cdot r \cdot \pi = R \cdot x$.

$$r = \frac{R \cdot x}{2 \cdot \pi}$$

Damit ist in einer ersten Nebenbedingung r durch x ausgedrückt.

Wegen

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

gilt

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R \cdot x}{2 \cdot \pi}\right)^2} = R \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

Damit ist in einer zweiten Nebenbedingung h durch x dargestellt.

Durch Einsetzen der Nebenbedingungen wird aus der Zielfunktion eine Funktion mit nur mehr einer Variablen.

$$V_{Kegel} = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\frac{R \cdot x}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4 \cdot \pi^2}} = \frac{R^3}{12 \cdot \pi} \cdot x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4 \cdot \pi^2}} = \frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2}$$

Einen Extremwert finden wir, wenn wir zunächst

$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2}$$

nach x differenzieren. Das ist schon recht komplex – die Sache steckt voller Haken. Am besten geht es schrittweise und hier helfen Piktogramme. Wichtig ist dabei die richtige Reihenfolge. Und nicht aufgeben!

$$V'(x) = \left(\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2}\right)'$$

$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left(x^2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2}\right)'$$

$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left((x^2)' \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \left(\sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2}\right)'\right)$$

$$\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(2\cdot x\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}+x^2\cdot\left(\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}\right)'\right)=$$

$$=\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(2\cdot x\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}+x^2\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}\right)'\right)$$

$$\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(2\cdot x\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}+x^2\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}\right)'\right)=$$

$$=\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(2\cdot x\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}+x^2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot z^{-\frac{1}{2}}\cdot z'\right)=$$

$$=\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(2\cdot x\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}+x^2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(4\cdot\pi^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4\cdot\pi^2-x^2)'\right)$$

$$\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(2\cdot x\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}+x^2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(4\cdot\pi^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot((4\cdot\pi^2)'-(x^2)')\right)$$

$$\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(2\cdot x\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}+x^2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(4\cdot\pi^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-(x^2)')\right)$$

$$\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(2\cdot x\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}+x^2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(4\cdot\pi^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\cdot(x^2)'\right)$$

$$\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(2\cdot x\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}+x^2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(4\cdot\pi^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\cdot 2\cdot x\right)$$

$$\frac{R^3\cdot x}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(2\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}}\right)$$

$$\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\frac{8\cdot\pi^2\cdot x-3\cdot x^3}{\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}}$$

Unser **Extremwert** muss sich unter den Nullstellen von $V'(x)$ finden lassen.

$$\frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\frac{8\cdot\pi^2\cdot x-3\cdot x^3}{\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}}=0$$

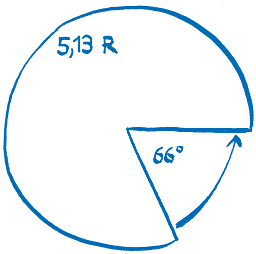
Wir kürzen durch die konstanten Faktoren, die vorne stehen, multiplizieren die Gleichung mit dem Wurzelausdruck und heben x heraus.

$x \cdot (8 \cdot \pi^2 - 3 \cdot x^2) = 0$

Da bei $x = 0$ mit $V = 0$ nur ein Volumenminimum vorliegen kann, bleibt als einzige positive Lösung:

$x = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{rad} = 5{,}13\ \mathrm{rad}$

Dieser Wert entspricht etwa 294°. Der einzufaltende Winkel ist demnach 360° - 294° = 66°.



Dass dieser Wert ein **Volumenmaximum** und nicht ein Minimum darstellt, ist geometrisch klar.

Überlappt man fast alles eventuell mehrfach (hoher, sehr schmaler Kegel), so ist das Volumen sehr klein. Dasselbe gilt, wenn man fast nichts einfaltet (breiter, sehr flacher Kegel). Dazwischen kann nur ein Maximalwert liegen.

Wer es mathematisch prüfen will, muss 5,13 in die zweite Ableitung $V''(x)$ einsetzen. Der Wert, der sich ergibt, müsste dann negativ sein.

Das maximale Fassungsvermögen des Filters ist $V_{\text{Kegel}}(5{,}13)$. Der numerische Wert beträgt $0{,}403 \cdot R^3$.