wi
wirtschaft

Gertrud Moosmüller

# Methoden der empirischen Wirtschaftsforschung

„Bafög"-Ausgabe

PEARSON
Studium

# Methoden der empirischen Wirtschaftsforschung

Gertrud Moosmüller



PEARSON Studium

ein Imprint von Pearson Education
München • Boston • San Francisco • Harlow, England
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City
Madrid • Amsterdam

$$\tilde{f} = \frac{(\tilde{b}_j - 0)^2 / 1}{[\underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}}/(T - k)] \cdot h_{jj}} = \frac{\tilde{b}_j^2}{\left[\sum_t \tilde{e}_t^2 \Big/ (T - k)\right] \cdot h_{jj}} ; \qquad (2.2\text{-}26e)$$

der Ablehnungsbereich ergibt sich analog zu (2.2-26d). Nimmt also die Variable $\tilde{f}$ einen Wert in diesem Bereich an, so kann von einem Einfluss des Regressors $x_j$ auf die Zielvariable ausgegangen werden; $x_j$ bleibt im Ansatz.[41]

### (b) Hypothesenprüfung für alle Steigungskoeffizienten

Wird in (2.2-25) *speziell* $\underline{r} = \underline{0}$ sowie

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{[(k-1) \times k]}$$

gesetzt, so ergibt sich die Hypothese

$$H_0 :'' \ \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0'' \quad , \qquad (2.2\text{-}25b)$$

d.h. es wird der gesamte gewählte Regressionsansatz auf den Prüfstand gestellt. In der Größe $\tilde{f}$ aus (2.2-26) ist dann der Ausdruck $\underline{R}\,\tilde{\underline{b}} - \underline{r}$ gleich dem $(k-1)$-komponentigen OLS-Schätzvektor $\tilde{\underline{b}}_2 := \left(\tilde{b}_2 \quad \tilde{b}_3 \quad \dots \quad \tilde{b}_k\right)'$[42] und $\underline{R}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{R}'$ greift die rechte untere Teilmatrix der Ordnung $[(k-1) \times (k-1)]$ von $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ heraus. Diese ist gleich dem Produkt $\left(\underline{X}_2'\underline{A}\,\underline{X}_2\right)^{-1}$, mit der Matrix $\underline{A}$ aus (2.2-17) und der $[T \times (k-1)]$–Matrix $\underline{X}_2$, die sämtliche Regressorenwerte enthält und sich somit aus der Gesamtmatrix $\underline{X}$ aus (2.2-1b) durch Streichen der ersten Spalte, also der Werte des „Scheinregressors", ergibt. Damit erhält man aus (2.2-26) *speziell* die Prüfgröße

$$\tilde{f} = \frac{\tilde{\underline{b}}_2' \left(\underline{X}_2'\underline{A}\,\underline{X}_2\right) \tilde{\underline{b}}_2 \Big/ (k-1)}{\underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}}/(T - k)} \quad , \qquad (2.2\text{-}26f)$$

die bei Gültigkeit von $H_0$ *F-verteilt* ist mit $(k-1)$und $(T-k)$ Freiheitsgraden. Der Ablehnungsbereich ergibt sich wiederum analog zu (2.2-26d); nimmt $\tilde{f}$ einen Wert in dieser kritischen Region an, so kann davon ausgegangen werden, dass *alle* Regressoren einen signifikanten Einfluss auf den Regressanden haben, der Gesamtansatz also adäquat gewählt wurde.

### (c) Hypothesenprüfung für eine Teilmenge von Steigungskoeffizienten

Soll nur der Einfluss *bestimmter* Regressoren auf die Zielvariable getestet werden, setzt man *speziell* $\underline{r} = \underline{0}$ und $\underline{R} = [\,\underline{0} \quad \underline{I}_s\,]$ und erhält somit die *spezielle* Hypothese

---

41. Statt (2.2-26e) kann man auch die Prüfgröße $\tilde{t} = \frac{\tilde{b}_j}{\sqrt{\sum \tilde{e}_t^2/(T-k)} \cdot \sqrt{h_{jj}}}$ benutzen; diese ist die positive Quadratwurzel der Größe $\tilde{f}$ aus (2.2-26e) und es ist einfach zu zeigen, dass sie bei Gültigkeit von $H_0$ t-verteilt ist mit $(T-k)$ Freiheitsgraden. Weiterhin ist zu beachten, dass beim Testen der allgemeineren Hypothese $H_0 : \beta_j = \beta_{j0}$ im jeweiligen Zähler der Prüfvariablen statt des speziellen Wertes „Null" der in $H_0$ behauptete Wert $\beta_j = \beta_{j0} \neq 0$ einzusetzen ist. Der Ablehnungsbereich ist hier zweiseitig, d.h. $H_0$ wird abgelehnt falls die Prüfgröße $\tilde{t}$ einen Wert annimmt, für den $|t| > t(1 - \alpha/2 \,|\, T - k)$ gilt. $t(1 - \alpha/2 \,|\, T - k)$ ist dabei das Quantil der entprechenden t-Verteilung.
42. In $\tilde{\underline{b}}_2$ werden also nur die Steigungskoeffizienten zusammengefasst; das Absolutglied ist nicht enthalten.

$$H_0 :'' \beta_{k-s+1} = \beta_{k-s+2} = \ldots = \beta_k = 0'' .^{43} \tag{2.2-25c}$$

Werden die Werte der s interessierenden Regressoren in der Teilmatrix $\underline{X}_s$ zusammengefasst, die Matrix $\underline{X}$ also in $[\underline{X}_r \quad \underline{X}_s]$ aufgespaltet, und wird entsprechend mit dem Vektor $\underline{b}$ der Schätzwerte verfahren, so gilt gemäß der allgemeinen Beziehung (2.2-2a)

$$\underline{\tilde{y}} \overset{(2.2-2a)}{=} \underline{X}\,\underline{b} + \underline{\tilde{e}} = [\underline{X}_r \quad \underline{X}_s]\begin{pmatrix}\underline{b}_r\\ \underline{b}_s\end{pmatrix} + \underline{\tilde{e}} = \underline{X}_r\underline{b}_r + \underline{X}_s\underline{b}_s + \underline{\tilde{e}} \; ; \tag{2.2-2b}$$

die Matrix $\underline{X}_r$ ist vom Typ $[T \times (k-s)]$ und erfasst die ersten $r = (k-s)$, die $(T \times s)-$Matrix $\underline{X}_s$ die letzten $(k-s)$ Spalten von $\underline{X}$. Damit ist hier $\underline{R}\,\underline{\tilde{b}} - \underline{r} = \underline{\tilde{b}}_s$ und das Matrizenprodukt $\underline{R}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{R}'$ greift die rechte untere Teilmatrix der Ordnung $(s \times s)$ von $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ heraus. Diese kann mit $\left(\underline{X}_2'\underline{M}_r\underline{X}_2\right)^{-1}$ angegeben werden, wobei für die idempotente und symmetrische Matrix $\underline{M}_r$ – analog zur Matrix $\underline{M}$ aus (2.2-11) –

$$\underline{M}_r = \underline{I}_{(T\times T)} - \underline{X}_r\left(\underline{X}_r'\underline{X}_r\right)^{-1}\underline{X}_r' \tag{2.2-26g}$$

gilt. Somit ergibt das Einsetzen dieser Ausdrücke in die allgemeine Formel (2.2-26) hier die *spezielle* Prüfgröße

$$\tilde{f} = \frac{\underline{\tilde{b}}_s'\left(\underline{X}_s'\underline{M}_r\,\underline{X}_s\right)\underline{\tilde{b}}_s / s}{\underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}}/(T-k)} \; , \tag{2.2-26h}$$

die bei Gültigkeit der Nullhypothese (2.2-25c) wiederum *F-verteilt* ist mit *s* und $(T-k)$ Freiheitsgraden. Da gezeigt werden kann, dass die Zählergröße $\underline{\tilde{b}}_s'\left(\underline{X}_s'\underline{M}_r\underline{X}_s\right)\underline{\tilde{b}}_s$ aus (2.2-26h) mit der Differenz der Residuenquadratsummen $\underline{\tilde{e}}_r'\underline{\tilde{e}}_r - \underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}}$ übereinstimmt, wobei der erste Term aus dem reduzierten Ansatz mit nur $r = (k-s)$ Regressoren und der zweite Term aus dem Gesamtansatz (2.2-1) entstammt, kann die Prüfvariable $\tilde{f}$ aus Beziehung (2.2-26h) auch in der Form

$$\tilde{f} = \frac{\left(\underline{\tilde{e}}_r'\underline{\tilde{e}}_r - \underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}}\right)/s}{\underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}}/(T-k)} \tag{2.2-26i}$$

angegeben werden. Denn die Differenz der Residuenquadrate kann als diejenige Größe interpretiert werden, um die der nicht erklärte Anteil RSS der Gesamtstreuung TSS[44] der Werte der Zielvariablen reduziert bzw. umgekehrt der erklärte Varianzanteil ESS erhöht werden kann, wenn nicht nur die ersten r, sondern alle k Regressoren in den Ansatz aufgenommen werden. Die Vorgehensweise bei diesem Test kann somit folgendermaßen beschrieben werden:[45]

**c1)** Durchführung einer Regression von $\underline{y}$ auf die Variablen in $\underline{X}_r$, die nicht in der Hypothese (2.2-25c) erfasst sind, und Berechnung der zugehörigen Residuenquadratsumme $\underline{e}_r'\underline{e}_r$;

**c2)** Durchführung einer Regression von $\underline{y}$ auf alle Variablen $\underline{X}$ und Berechnung der zugehörigen Resuduenquadratsumme $\underline{e}'\underline{e}$; die Differenz $\underline{e}_r'\underline{e}_r - \underline{e}'\underline{e}$ ist dann analog zu oben interpretierbar;

43. Gegebenenfalls ist vorab eine Umnummerierung der s interessierenden Regressoren vorzunehmen, um sie und die zugehörigen Steigungskoeffizienten zusammenfassen zu können.

44. Man vergleiche die Steuungszerlegungsformel TSS = ESS + RSS aus (2.2-15a).

45. Da der Test auf einen einzigen Steigungskoeffizienten bzw. den zugehörigen Regressor nur einen Spezialfall darstellt, können die folgenden Ausführungen auch auf diese Situation übertragen werden.

**c3)** Vergleich der mittleren Quadratsummen $\left(\underline{e}_r'\underline{e}_r - \underline{e}'\underline{e}\right)/s$ und $\underline{e}'\underline{e}/(T-k)$; übersteigt der Quotient dieser Summen das $(1-\alpha)-$Quantil der entsprechenden F-Verteilung mit s und $(T-k)$ Freiheitsgraden, so wird die Hypothese (2.2-25c), dass die letzten s Regressoren *keinen* Einfluss auf die Zielvariable besitzen, beim Signifikanzniveau $\alpha$ abgelehnt.

Die in (2.2-25) allgemein formulierte Hypothese kann als Behauptung gesehen werden, der Parametervektor $\underline{\beta}$ gehorche q „*Nebenbedingungen*“. Wird diese Nullhypothese *nicht* abgelehnt, schätzt man das Modell neu, wobei diese „Nebenbedingungen“ im Schätzverfahren berücksichtigt werden. Damit soll eine effizientere Schätzung erreicht werden. Gesucht ist somit eine Schätzfunktion $\underline{\tilde{b}}*$, für die

$$\underline{R}\,\underline{\tilde{b}}* = \underline{r} \tag{2.2-27}$$

gilt; diese erhält man durch einen LAGRANGE-Ansatz, in welchen die zu minimierende Zielfunktion (2.2-4) der MQ-Methode und die Nebenbedingung (2.2-27) eingehen. Die übliche Vorgehensweise ergibt Normalgleichungen, die auch die Nebenbedingungen berücksichtigen; aus deren Auflösung resultiert der Vektor $\underline{\tilde{b}}*$ der Schätzfunktionen mit

$$\underline{\tilde{b}}* = \underline{\tilde{b}} + (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{R}'\left[\underline{R}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{R}'\right]^{-1}\left(\underline{r} - \underline{R}\,\underline{\tilde{b}}\right) \quad , \tag{2.2-28}$$

wobei $\underline{\tilde{b}}$ wieder den Vektor der OLS-Schätzfunktionen im Modell ohne Nebenbedingungen bezeichnet. Die Komponenten von $\underline{\tilde{b}}*$ heißen *RLS-Schätzfunktionen*, da sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate unter Beachtung von Restriktionen berechnet werden. Bezeichnet man mit $\underline{\tilde{e}}*'\,\underline{\tilde{e}}*$ die Residuenquadratsumme im Modell mit Nebenbedingungen, so gilt für die Differenz zwischen den entsprechenden Quadratsummen im Modell mit und ohne Nebenbedingungen

$$\underline{\tilde{e}}*'\,\underline{\tilde{e}}* - \underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}} = \left(\underline{r} - \underline{R}\,\underline{\tilde{b}}\right)'\left[\underline{R}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{R}'\right]^{-1}\left(\underline{r} - \underline{R}\,\underline{\tilde{b}}\right) \quad ; \tag{2.2-29}$$

dieser Ausdruck ist identisch mit dem Zähler der Prüfgröße $\tilde{f}$ aus (2.2-26) zur Prüfung der Nullhypothese $H_0$ :″ $\underline{R}\,\underline{\beta} = \underline{r}$″ aus (2.2-25),[46] so dass $\tilde{f}$ auch durch

$$\tilde{f} = \frac{\left(\underline{\tilde{e}}^{*\prime}\underline{\tilde{e}}^{*} - \underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}}\right)\Big/q}{\underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}}/(T-k)} \tag{2.2-26j}$$

wiedergegeben werden kann. Eine alternative Formulierung dieser mit q und $(T-k)$ Freiheitsgraden F-verteilten Größe ist

$$\tilde{f} = \frac{\left(\underline{\tilde{b}}^{*} - \underline{\tilde{b}}\right)'\underline{X}'\underline{X}\left(\underline{\tilde{b}}^{*} - \underline{\tilde{b}}\right)\Big/q}{\underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}}/(T-k)} \quad . \tag{2.2-26k}$$

Die üblichere Vorgehensweise der Hypothesenprüfung mit Hilfe der Prüfvariablen $\tilde{f}$ aus (2.2-26) und deren speziellen Formen soll im Folgenden anhand der Daten und bisherigen Ergebnisse aus Beispiel 2.1 dargestellt werden.

46. Denn es gilt

$$\left(\underline{r} - \underline{R}\,\underline{\tilde{b}}\right)'\left[\underline{R}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{R}'\right]^{-1}\left(\underline{r} - \underline{R}\,\underline{\tilde{b}}\right) = \left(\underline{R}\,\underline{\tilde{b}} - \underline{r}\right)'\left[\underline{R}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{R}'\right]^{-1}\left(\underline{R}\,\underline{\tilde{b}} - \underline{r}\right).$$

**Beispiel 2.4**

a. Ausgehend von den Daten aus Tabelle 2.1 und dem *Modell 1* des Beispiels 2.2 soll nun die Hypothese getestet werden, dass das Bruttoinlandsprodukt *keinen* Einfluss auf den privaten Konsum besitzt, also keinen Erklärungsbeitrag zu $C^{priv}$ liefert; d.h. zu testen ist $H_0$ :" $\beta_2 = 0$". Eine äquivalente Formulierung dieser Nullhypothese ist

$$H_0 :\text{"}\ \underline{R}\underline{\beta} = \underline{r}\text{"}, \text{ mit } \underline{R} = (\,0 \quad 1\,) \text{ und } \underline{r} = r = 0\,. \qquad \text{(B2-12)}$$

Die Ausprägung der Prüfvariablen $\tilde{f}$ lautet[47]

$$\begin{aligned} f &\overset{(2.2-26e)}{=} \frac{b_2^2}{[\,\underline{e}'\underline{e}/(T-k)]\cdot h_{22}} \\ &\overset{(B2-4)}{=} \frac{0,657^{\,2}}{[948,296/(12-2)]\cdot 2,4875\cdot 10^{-6}} \\ &\overset{(B2-6)}{=} \frac{0,657^2}{0,015^2} \\ &= 43,8^{\,2}\,; \end{aligned} \qquad \text{(B2-13)}$$

sei z.B. das Signifikanzniveau (=: SN) für den Test mit $\alpha = 0,05$ gegeben; dann ist obige $H_0$ bei diesem SN *abzulehnen*, da

$$f = 43,8^{\,2} >> f(1-\alpha\,|\,q;T-k) = f(0,95\,|\,1;10) \underset{\text{Tab.}}{\overset{\uparrow}{=}} 4,96\,;^{48} \qquad \text{(B2-14)}$$

die vorliegenden Beobachtungen unterstützen somit den herkömmlichen Erklärungsansatz der Beeinflussung des privaten Konsums durch das Bruttoinlandsprodukt.

b. Betrachtet wird das *Modell 2* aus Beispiel 2.1; zu testen ist zunächst die Hypothese, dass die Summe der Nettolöhne/-gehälter keinen Einfluss auf den privaten Konsum besitzt, also keinen Erklärungsbeitrag für $C^{priv}$ liefert; d.h. zu testen ist $H_0$ :" $\beta_3 = 0$". Eine äquivalente Formulierung dieser Nullhypothese ist

$$H_0 :\text{"}\ \underline{R}\underline{\beta} = \underline{r}\text{"}, \text{ mit } \underline{R} = (\,0 \quad 0 \quad 1\,) \text{ und } \underline{r} = r = 0\,. \qquad \text{(B2-15)}$$

47. Die Ausprägung der Prüfgröße $\tilde{f}$ kann alternativ mit $b_2^2/\mathrm{var}\,b_2$ angegeben werden. Statt $\tilde{f}$ kann auch die Quadratwurzel von $\tilde{f}$ benutzt werden; diese ist t-verteilt mit (T – k) Freiheitsgraden und wird hier im SPSS-Ausdruck mit t = 42,789 angegeben. Die Differenz zu dem hier berechneten Wert erklärt sich aus der oben angesprochenen Rundungsproblematik.

48. Man beachte die grundsätzlich andere Vorgehensweise in der Ausgabe der SPSS-Ergebnisse. Dort wird neben der Ausprägung der Prüfgröße in der Spalte „Signifikanz" die Größe angegeben, die das Signifikanzniveau annehmen müßte, damit die Nullhypothese abgelehnt wird. Diese Größe wird manchmal auch als „Überschreitungswahrscheinlichkeit" bezeichnet. Ist dieser Wert größer als das üblicherweise vorgegebene SN von 0,01, 0,05 oder 0,10, so ist das Testergebnis als „nicht signifikant" zu betrachten, die Hypothese also nicht abzulehnen, und umgekehrt. Für die jeweiligen Quantile liegen geeignete Tabellenwerke vor.

Die Ausprägung der Prüfvariablen $\tilde{f}$ berechnet sich analog zu (B2-13) mit[49]

$$f \overset{(2.2-26e)}{=} \frac{b_3^2}{[\underline{e}'\underline{e}/(T-k)]\cdot h_{33}} = \frac{0,372^2}{[634,703/(12-3)]\cdot 0,0004408}$$

$$= \frac{0,372^2}{0,176^2} = 2,114^2 \approx 4,467\,; \tag{B2-16}$$

ist das Signifikanzniveau (SN) für den Test wiederum mit $\alpha = 0,05$ gegeben, so ist obige $H_0$ bei diesem SN *nicht abzulehnen*, da

$$f = 2,873 < f(1-\alpha\,|\,q\,;T-k) = f(0,95\,|\,1\,;9) \underset{\uparrow \atop \text{Tab.}}{=} 5,12\,.^{50} \tag{B2-17}$$

Eine andere Möglichkeit der Prüfung von $H_0$ :″ $\beta_3 = 0$″ besteht in folgender Vorgehensweise: Dem Gesamtansatz (B2-7) mit drei Regressoren und der Residuenquadratsumme $\underline{e}'\underline{e} = 634,703$ wird der „reduzierte“ Ansatz (B2-3) aus Beispiel 2.-2 gegenübergestellt, der zur Erklärung von $C^{priv}$ nur zwei Regressoren unterstellt.[51] Die Residuenquadratsumme dieses Ansatzes wurde mit $\underline{e}_r'\underline{e}_r = 948,296$ berechnet. Die Ausprägung der Prüfvariablen ist nun

$$f \overset{(2.2-26i)}{=} \frac{(\underline{e}_r'\underline{e}_r - \underline{e}'\underline{e})/s}{\underline{e}'\underline{e}/(T-k)} = \frac{(948,296 - 634,703)/1}{634,703/(12-3)} \approx 4,447\ ;^{52} \tag{B2-18}$$

$H_0 : \beta_3 = 0$ wird bei einem SN $\alpha = 0,05$ *nicht abgelehnt*, da $f < f(1-\alpha\,|\,s\,;T-k) = f(0,95\,|\,1\,;8) = 5,32$; diese Aussage stimmt also mit dem vorherigen Ergebnis überein. Die Summe der Nettolöhne/-gehälter könnte aus dem Ansatz genommen werden.
Nun soll der Erklärungsgehalt des Gesamtansatzes von *Modell 2* überprüft werden, also $H_0$ :″ $\beta_2 = \beta_3 = 0$″; diese Hypothese ist äquivalent zu

$$H_0 :'' \ \underline{R}\underline{\beta} = \underline{r}'' \text{ , mit } \underline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ; \tag{B2-19}$$

Der Wert der Prüfvariablen berechnet sich hier mit[53]

49. Die Berechnung von $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ und damit der Hauptdiagonalelemente $h_{jj}$ ist nicht explizit dem SPSS-Ausdruck zu entnehmen; sie erfolgte zusätzlich mit Hilfe des Programms Maple V.5.1. Die Ausprägung der Prüfgröße lässt sich auch mit $b_3^2/\text{var}\, b_3$ angeben. Zu beachten ist wiederum, dass sich aufgrund von unterschiedlichen Rundungen in SPSS 11.5 eine Ausprägung der Prüfgröße von $f = t^2 = 2,109^2 \approx 4,448$ ergibt. Dies ändert aber nichts an der zu treffenden Aussage bzgl. der Nullhypothese.
50. Das gleiche Ergebnis resultiert natürlich auf der Grundlage der t-verteilten Prüfgröße, da $t = 2,109 < t(1-\alpha/2\,|T-k) = t(0,975\,|\,9) = 2,262$. Weiterhin sei noch auf die Ausführungen der vorletzten Fußnote verwiesen.
51. Die formulierte $H_0$ entspricht also der allgemeinen Formulierung, dass nur die ersten r Regressoren einen Einfluss auf den Regressanden heben, nicht jedoch die letzten s erklärenden Variablen; hier ist r = 1 und s = 1 zu setzen.
52. Auch hier ist die geringfügige Abweichung zu der in (B2-16) berechneten Ausprägung der Prüfgröße durch unterschiedliche Rundungen zu erklären.
53. Die Berechnungen wurden mit Hilfe des Programms Maple Version 5.1. durchgeführt.

$$f \overset{(2.2-26)}{=} \frac{(\underline{R}\,\underline{b} - \underline{r})' \left[\underline{R}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{R}'\right]^{-1} (\underline{R}\,\underline{b} - \underline{r}) \big/ q}{\underline{e}'\underline{e}/(T - k)} \approx 1233{,}86 \quad , \tag{B2-20}$$

so dass auf dem Niveau von z.B. $\alpha = 0{,}05$ diese $H_0$ *abzulehnen* ist, da $f >> f(0{,}95\,|\,2\,;\,9) = 4{,}26$; d.h. der unterstellte Ansatz liefert durchaus einen Erklärungsbeitrag für die abhängige Variable $C^{priv}$, was auch schon durch das in Beispiel 2.1 berechnete hohe Bestimmtheitsmaß bestätigt wurde.

Nach dieser Darstellung der Möglichkeiten zur Überprüfung verschiedener Modellansätze sowie bestimmter Vorgaben bzgl. einzelner Parameterwerte, die u.U. aus dem ökonomischen Zusammenhang vorgegeben sind, soll noch kurz auf die *Intervallschätzung im KLR* eingegangen werden.

Aus (2.2-24a) folgt, dass das *Konfidenzintervall* der Größe $(1 - \alpha)$ für einen *einzelnen Koeffizienten* $\beta_j$ mit

$$\left[ b_j - t(1 - \alpha/2|T - k) \cdot \sqrt{\frac{\sum e_t^2}{T - k}} \cdot \sqrt{h_{jj}}\ ;\ b_j + t(1 - \alpha/2|T - k) \cdot \sqrt{\frac{\sum e_t^2}{T - k}} \cdot \sqrt{h_{jj}} \right] \tag{2.2-30}$$

gegeben ist. Das Quantil ergibt sich dabei aus der für die Prüfgröße $\tilde{t}$ abgeleiteten Verteilung.[54]

*Konfidenzintervalle* lassen sich aber nicht nur für einzelne Koeffizienten $\beta_j$, sondern auch *simultan* für mehrere Parameter angeben. Dazu verwendet man das Ergebnis, dass die Größe $(\underline{R}\,\underline{\tilde{b}} - \underline{\beta})' [\sigma_ü^2\, \underline{R}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{R}']^{-1} (\underline{R}\,\underline{\tilde{b}} - \underline{\beta})$ mit q Freiheitsgraden $\chi^2$-verteilt ist;[55] da auch $\underline{\tilde{e}}'\underline{\tilde{e}}/\sigma_ü^2$ $\chi^2$–verteilt ist mit $(T - k)$ Freiheitsgraden und beide Variablen stochastisch unabhängig sind, ist der Quotient $\tilde{f}$ aus beiden Größen mit q und $(T - k)$ Freiheitsgraden F-verteilt ist.[56] Durch geeignete Wahl der Matrix $\underline{R}$ und Umformung nach den entsprechenden Komponenten von $\underline{\beta}$ erhält man das gemeinsame Konfidenzintervall für Gruppen von Parametern aus $\underline{\beta}$.

54. Mit Hilfe dieses Konfidenzintervalls kann auch die Hypothese aus (2.2-25a) getestet werden: Gilt $0 \in KI$, so kann sie nicht abgelehnt werden, d.h. der zugehörige Regressor $x_j$ hat keinen signifikanten Einfluss auf die Zielvariable y und kann aus dem Ansatz genommen werden. Für $0 \notin KI$ ist dagegen der Einfluss bestätigt. Diese Vorgehensweise der Prüfung von Hypothesen ist grundsätzlich auch mit Hilfe simultaner Konfidenzintervalle möglich.

55. Vgl. dazu (2.2-26c).

56. Man beachte, dass bei der Quotientenbildung der unbekannte Parameter $\sigma_ü^2$ gekürzt werden kann.

**Beispiel 2.5** Ausgehend von den Beobachtungswerten und den bisherigen Ergebnissen aus Beispiel 2.2 und 2.4 lassen sich für die zu schätzenden Regressionsparameter $\beta_j$ für das *Modell 1* die *95%-Konfidenzintervalle*[57]

$$\left[b_1 \pm t(0{,}975|10) \cdot \sqrt{\frac{\sum e_t^2}{T-k}} \cdot \sqrt{h_{11}}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tab.}}}{\overset{\substack{(B2-4) \\ (B2-6)}}{=}} [-145{,}894 \pm 2{,}228 \cdot 28{,}462]$$

$$= [-209{,}307 \leq \beta_1 \leq -82{,}481] \qquad \text{(B2-21)}$$

und

$$\left[b_2 \pm t(0{,}975|10) \cdot \sqrt{\frac{\sum e_t^2}{T-k}} \cdot \sqrt{h_{22}}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tab.}}}{\overset{\substack{(B2-4) \\ (B2-6)}}{=}} [0{,}657 \pm 2{,}228 \cdot 0{,}015]$$

$$= [0{,}624 \leq \beta_2 \leq 0{,}690] \qquad \text{(B2-22)}$$

berechnen. Da beide Konfidenzintervalle die Null nicht enthalten, bestätigen sie die Aussage der Hypothesenprüfung aus Beispiel 2.4 sowie des in Beispiel 2.2 ermittelten Bestimmtheitsmaßes für *Modell 1*, dass das Bruttoinlandsprodukt den privaten Konsum beeinflusst.

Analog können für *das Modell 2* unter Beachtung der Ergebnisse (B2-8) und (B2-10) aus Beispiel 2.2 folgende 95%-Konfidenzintervalle für die einzelnen Koeffizienten $\beta_j$ ermittelt werden:

$$[-352{,}779 \leq \beta_1 \leq -124{,}708]\,;\,[0{,}530 \leq \beta_2 \leq 0{,}668]\,;$$
$$[-0{,}027 \leq \beta_3 \leq 0{,}771]^{58} \qquad \text{(B2-23)}$$

Auch sie bestätigen die Aussagen der Hypothesenprüfung aus Beispiel 2.4; der Regressor $x_3$ könnte aus dem Ansatz genommen werden, da auf dem Niveau $\alpha = 0{,}05$ kein signifikanter Einfluss der Variablen „Nettolöhne/-gehälter“ bestätigt werden kann. Dies ergibt sich aus dem ermittelten Konfidenzintervall für $\beta_3$, das die Null enthält.

Sind für einen konkreten Stichprobenbefund die OLS-Schätzwerte $\underline{b}$ und $s_e^2$ ermittelt und ist die Güte des unterstellten Regressionsansatzes überprüft worden, so kann anschließend eine *Prognose* für den *zukünftigen Wert* der Zielvariablen durchgeführt werden. Die Durchführung von Prognosen ist insbesondere im Rahmen der empirischen Wirtschaftsforschung von großer Bedeutung. Dabei wird grundsätzlich unterstellt, dass sämtliche gegebenen Strukturen auch in der Zukunft gelten, also *kein Strukturbruch*[59] gegeben ist, da sonst die Prognosen fehlerhaft sind.

Prognosen können grundsätzlich für den *individuellen Wert* $y_z$ oder den *Erwartungswert* $Ey_z$ der Zielgröße erstellt werden. Sie erfolgen auf der Grundlage der mit Hilfe der

57. Die Konfidenzintervalle wurden wiederum mit der Routine *„Lineare Regression“* des Programmpaketes SPSS 11.5 berechnet; daraus ergeben sich aufgrund von Rundungen etwaige kleine Abweichungen in den ermittelten Zahlen.
58. Die Konfidenzintervalle wurden mit der Routine *„Lineare Regression“* des Programmpaketes SPSS 11.5 berechnet; hier gehen die Quantile $t(0{,}975\,|\,9) = 2{,}262$ in die Berechnung ein.
59. Tests auf Strukturbrüche werden in Kapitel 2.2.1.4.2 behandelt.

MQ-Methode ermittelten Schätzwerte $\underline{b}$ und unterscheiden sich in ihrer Berechnung nicht; nur die Varianz der jeweiligen Schätzfunktionen ist verschieden, so dass sich andere Grenzen für die Konfidenzintervalle ergeben. Für den *individuellen Wert*, für den der Ansatz

$$\tilde{y}_z = \underline{X}_z\underline{\beta} + \tilde{u}_z \tag{2.2-31}$$

gelten soll, resultiert der *Prognosewert*

$$\hat{y}_z = (1 \quad x_{2z} \quad x_{3z} \quad \ldots \quad x_{kz}) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = \underline{X}_z \underline{b} \ , \tag{2.2-32a}$$

mit $\hat{y}_z :=$ prognostizierter individueller Wert der Zielgröße, $\underline{X}_z := (1 \times k)-$Matrix der *bekannten* zukünftigen Werte der erklärenden Variablen und $\underline{b} :=$ Vektor der gegebenen OLS-Schätzwerte für $\underline{\beta}$. Der sich daraus ergebende *Prognosefehler* $\tilde{e}_z = \tilde{y}_z - \hat{\tilde{y}}_z$ besitzt einen Erwartungswert von Null und eine Varianz, die – unter Beachtung des Annahmesystems des KLR – mit

$$\begin{aligned} \operatorname{var} \tilde{e}_z &= E\left[-\underline{X}_z\left(\tilde{\underline{b}} - \underline{\beta}\right) + \tilde{u}_z\right]^2 = \sigma_{\tilde{u}}^2 \underline{X}_z \left(\underline{X}'\underline{X}\right)^{-1} \underline{X}_z' + \sigma_{\tilde{u}}^2 \\ &= \sigma_{\tilde{u}}^2 \left[\underline{X}_z \left(\underline{X}'\underline{X}\right)^{-1} \underline{X}_z' + 1\right] \end{aligned} \tag{2.2-33}$$

berechnet werden kann. Wird der unbekannte Parameter $\sigma_{\tilde{u}}^2$ wieder qualifiziert durch $\tilde{s}_{\tilde{e}}^2$ geschätzt, so ergibt sich für die zu $\tilde{e}_z$ gehörende standardisierte Größe eine *t-Verteilung* mit $(T - k)$Freiheitsgraden. Durch Umformung erhält man das *Konfidenzintervall* für $y_z$ mit

$$\left[\underline{X}_z \underline{b} \pm t(1 - \alpha/2 \,|\, T - k) \cdot s_{\tilde{e}} \cdot \sqrt{\underline{X}_z (\underline{X}'\underline{X})^{-1} \underline{X}_z' + 1}\ \right] . \tag{2.2-34}$$

Für den *erwarteten Wert* des Regressanden, also für

$$E\,\tilde{y}_z = E\left(\underline{X}_z\underline{\beta} + \tilde{u}_z\right) \overset{(A1)}{=} \underline{X}_z\underline{\beta} \ , \tag{2.2-35}$$

erhält man als *Prognosewert* ebenfalls

$$\hat{E}y_z = \underline{X}_z\underline{b} \ ; \tag{2.2-32b}$$

die Varianz der zugehörigen Schätzfunktion $\underline{X}_z\tilde{\underline{b}}$ lautet – wiederum unter Beachtung des Annahmesystems des KLR –

$$\operatorname{var}\left(\underline{X}_z\tilde{\underline{b}}\right) = E\left[\underline{X}_z\left(\tilde{\underline{b}} - \underline{\beta}\right)\right]^2 = E\left[\underline{X}_z\left(\tilde{\underline{b}} - \underline{\beta}\right)\left(\tilde{\underline{b}} - \underline{\beta}\right)' \underline{X}_z'\right] = \sigma_{\tilde{u}}^2 \underline{X}_z \left(\underline{X}'\underline{X}\right)^{-1} \underline{X}_z' \ ; \tag{2.2-36}$$

da $\tilde{\underline{b}}$ wegen der Annahme (A4) eine multivariate Normalverteilung besitzt, ist auch der Skalar $\underline{X}_z\tilde{\underline{b}}$ normalverteilt mit den Parametern $\underline{X}_z\underline{\beta}$ und $\sigma_{\tilde{u}}^2\underline{X}_z(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}_z$. Wird der $\sigma_{\tilde{u}}^2$ wieder durch $\tilde{s}_{\tilde{e}}^2$ geschätzt, ergibt sich für die Größe $\left(\underline{X}_z\tilde{\underline{b}} - \underline{X}_z\underline{\beta}\right) \Big/ \tilde{s}_{\tilde{e}} \cdot \sqrt{\underline{X}_z(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}_z}$

eine *t-Verteilung* mit (T − k) Freiheitsgraden. Durch Umformung erhält man das im Vergleich zu (2.2-34) engere *Konfidenzintervall* für $Ey_z$ mit

$$\left[\underline{X}_z \underline{b} \pm t(1-\alpha/2\,|\,T-k)\cdot s_{\hat{e}}\cdot\sqrt{\underline{X}_z(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}_z'}\right] . \tag{2.2-37}$$

**Beispiel 2.6** Ausgehend von den Schätzergebnissen (B2-8) und $s_{\hat{e}}^2 = 70,523$ *für Modell 2* aus Beispiel 2.2 soll nun der private Konsum sowie der durchschnittlich zu erwartende private Konsum in der BRD für das Jahr 2003 prognostiziert werden, wenn man davon ausgeht, dass das BIP in diesem Jahr 2142,5 [Mrd. €] und die Nettolöhne/-gehälter 609,2 [Mrd. €] betragen. Weiterhin sind die jeweiligen 95%-Konfidenzintervalle für die zu prognostizierenden Größen zu ermitteln.

a. Der Prognosewert $\hat{y}_z = \hat{y}_{2003}$ für den privaten Konsum $C^{priv}$ ist

$$\begin{aligned}\hat{y}_{2003} &\overset{(2.2-32a)}{\underset{(B2-8)}{=}} (1 \quad 2142,5 \quad 609,2)\cdot\begin{pmatrix}-238,743\\ 0,599\\ 0,372\end{pmatrix}\\ &= -238,743 + 0,599\cdot 2142,5 + 0,372\cdot 609,2\\ &= 1271,2369 \;;\end{aligned} \tag{B2-24}$$

d.h. für das Jahr 2003 wird unter den gegebenen Voraussetzungen ein privater Konsum in Höhe von 1271,2369 [Mrd. €] prognostiziert. Das zugehörige 95%-Konfidenzintervall für diesen individuellen Prognosewert ergibt sich mit[60]

$$\begin{aligned}&\left[1271,2369 \pm t(0,975\,|\,9)\cdot\sqrt{70,523}\cdot\sqrt{0,75059554+1}\right]\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Tab.}}}{=} [1271,2369 \pm 2,262\cdot 14,7012]\\ &= [1237,9828 \;;\; 1304,4910] .\end{aligned} \tag{B2-25}$$

b. Der durchschnittlich zu erwartende Wert $\widehat{Ey}_{2003}$ des privaten Konsums für 2003 berechnet sich nach (2.2-32b) ebenfalls mit 1271,2369 [Mrd. €]. Das zugehörige 95%-Konfidenzintervall ist nun jedoch

$$\begin{aligned}&\left[1271,2369 \pm t(0,975\,|\,9)\cdot\sqrt{70,523}\cdot\sqrt{0,75059554}\right]\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Tab.}}}{=} [1271,2369 \pm 2,262\cdot 11,1111]\\ &= [1246,1036 \;;\; 1296,3702] \;;\end{aligned} \tag{B2-26}$$

es ist grundsätzlich enger als das entsprechende Intervall für den individuellen Prognosewert, die Prognose also genauer.

60. Die Berechnung der Matrix $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ ist ebenfalls dem Beispiel 2.2 zu entnehmen.

Die bisherigen Ausführungen zur Prognose beziehen sich auf sog. *ex-ante-Prognosen*; diese liegen vor, wenn sich die Prognosen auf zukünftige (erwartete) Werte einer Zielgröße beziehen. Prognosen können aber auch für vergangene Perioden durchgeführt werden; man spricht dann von *ex-post-Prognosen*. Diese haben vor allem eine Prüffunktion für den Erklärungsgehalt des angesetzten Modells und sind für die Entwicklung von (Prognose-)Modellen bedeutsam. Im ökonomischen Kontext werden sie z.B. zur Untersuchung möglicher wirtschaftspolitischer Maßnahmen herangezogen. Von Interesse ist dann, welche Auswirkungen diese gehabt hätten, wenn sie in der Vergangenheit eingesetzt worden wären. Außerdem werden in der Praxis auch sog. *pseudo-ex-ante-Prognosen* durchgeführt; diese beziehen sich auf aktuelle Größen und werden verwendet, um Daten zu approximieren, die nur mit erheblicher Verzögerung vorliegen. Sie können aber auch in Situationen angebracht sein, in denen die Beobachtungen zwar vorliegen, jedoch nicht für die Schätzung benutzt werden.

Prognosen sind neben Erklärungen Bestandteil der *Bewertung*. Diese besteht bei den Erklärungen grundsätzlich in Hypothesenprüfungen, die aber nur möglich sind, wenn der erklärte Zusammenhang dazu benutzt wird, ein schon eingetretenes Ereignis im nachhinein zu prognostizieren.[61] Alle Prognosearten sind für die Bewertung relevant, jedoch müssen gerade im Rahmen der empirischen Wirtschaftsforschung immer die Grenzen ihres Einsatzes im Blickfeld bleiben. Denn hier ist u.U. von Fehlern im erhobenen Datenmaterial auszugehen, die sich fortpflanzen; außerdem sind Prognosen erheblich von der richtigen Modellspezifikation, von gegebener Strukturkonstanz und von der Einhaltung der getroffenen Modellannahmen abhängig.[62] Auch die Tatsache, dass die Prognosen selbst Einfluss auf das Verhalten von Wirtschaftssubjekten haben, darf nicht übersehen werden. Die Bewertung der Prognosegüte kann bei ex-post-Prognosen durch einen geeigneten Vergleich der für den Prognosezeitraum vorliegenden Beobachtungswerte $y_{z_t}$ mit den geschätzten Werte $\hat{y}_{z_t}$ der Zielgröße erfolgen. Bei den pseudo-ex-ante-Prognosen kann geprüft werden, ob das unterstellte Modell die nicht zur Schätzung benutzten Daten reproduzieren kann. Diese Überprüfungen sind bei ex-ante-Prognosen nicht möglich; die üblichen Bewertungsmaße sind also nur bei ex-post- und pseudo-ex-ante-Prognosen einzusetzen.

*Bewertungsmaße* können sich auf die *Anpassungsgüte* von Schätzung und Prognose oder direkt auf die *Prognosegüte* beziehen. Übliche Maße für die *Anpassungsgüte* sind z.B. das (angepasste) Bestimmtheitsmaß und die Konfidenzintervalle, in welche jeweils auch die geschätzte Varianz $s_{\hat{e}}^2$ eingeht; neben diesen schon geschilderten Größen wird auch die Ausprägung der DURBIN-WATSON-Prüfgröße[63] herangezogen. Maße für die Bewertung der *Prognosegüte* beurteilen das Modell auf der Grundlage neu hinzugekommener Daten; mit Hilfe sog. *prediktiver Tests* wird überprüft, ob diese ebenfalls durch die angenommene Struktur reproduziert werden. Zu diesen Tests zählen Verfahren der *Tendenzanalyse* und der *Genauigkeitsanalyse*. Zur Tendenzanalyse gehören z.B. einfache *Prognose-Relations-Diagramme*, in denen die prognostizierten den realisierten Veränderungen gegenübergestellt werden, oder *Veränderungsraten*, die den Anteil der

61. Vgl. HUJER/CREMER, 1978, S. 250; WINKER, 1997, S. 231.
62. Man vergleiche dazu die bisherigen Ausführungen zur Hypothesenprüfung für die Modellspezifikation sowie zu Strukturbrüchen und Verletzung anderer Modellannahmen in Kapitel 2.2.1.4.
63. Siehe Kapitel 2.2.1.4.4.