et
elektrotechnik

mb
maschinenbau

Armin Hoffmann
Bernd Marx
Werner Vogt

Mathematik für Ingenieure 2

Vektoranalysis, Integraltransformationen, Differenzialgleichungen, Stochastik – Theorie und Numerik

PEARSON
Studium

Armin Hoffmann
Bernd Marx
Werner Vogt

Mathematik für Ingenieure 2

Vektoranalysis, Integraltransformationen, Differenzialgleichungen, Stochastik – Theorie und Numerik

PEARSON Studium

ein Imprint von Pearson Education
München • Boston • San Francisco • Harlow, England
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City
Madrid • Amsterdam

Für eine stetige Funktion f ergibt sich dann

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_{t_0,n}(t)\,dt - f(t_0) \right| = \left| \int_{t_0-1/n}^{t_0+1/n} [f(t) - f(t_0)]\varphi_{t_0,n}(t)\,dt \right|$$

$$\leq \sup_{|t-t_0|\leq 1/n} |f(t) - f(t_0)| \underbrace{\int_{t_0-1/n}^{t_0+1/n} \varphi_{t_0,n}(t)\,dt}_{=1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Somit gilt an einer beliebigen Stelle t_0:

$$f(t_0) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_{t_0,n}(t)\,dt\,.$$

Ist die Menge der Gewichtsfunktionen φ (bezeichnet mit S) „groß genug“, so kennt man durch die lineare Abbildung

$$T_f\colon S \to \mathbb{R}\,, \quad T_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt\,, \quad \varphi \in S$$

auch f selbst. Dies ist einer der Grundgedanken der Distributionstheorie. Statt von Gewichtsfunktionen spricht man auch von *Testfunktionen*. Unsere Menge von Test-

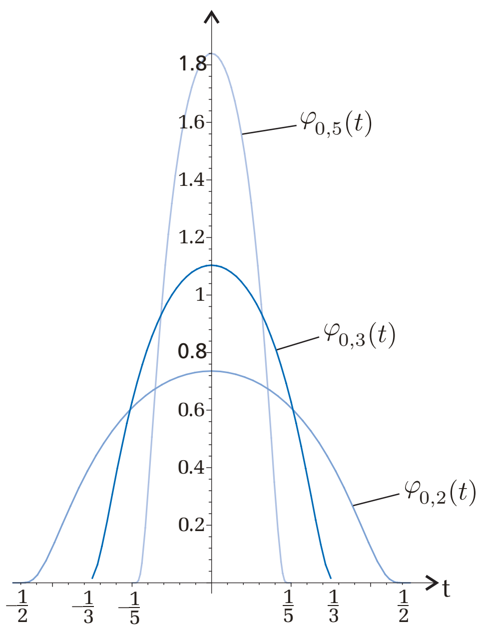

Abbildung 5.28: Verschiedene Gewichtsfunktionen $\varphi_{t_0,n}$

funktionen ist wieder der Funktionenraum $S(\mathbb{R}) \equiv S$, der in (5.58) definiert ist. Dieser Raum S hat eine Menge „schöner" Eigenschaften.

1. Es ist ein linearer Raum (Vektorraum). Somit können wir Signale überlagern und um einen Faktor verstärken.
2. Auf S ist die Fourier-Transformation erklärt und mit der Zeitfunktion φ ist auch die Frequenzfunktion $\hat{\varphi}$ wieder in S. Gleiches gilt auch für die Umkehrfunktion.
3. Die Verzögerung von Signalen (Translation) und auch die Faltung zweier Funktionen führen aus S nicht heraus, dies gilt auch für die Ableitungen von Funktionen aus S.

Trotz dieser angenehmen Eigenschaften ist der Raum S für Anwendungen in den Naturwissenschaften und der Technik zu klein. Wie bereits erwähnt, gehören solche einfachen Funktionen wie eine Sprungfunktion, $\varphi(t) = t$ oder $\varphi(t) = 1/(1 + t^2)$ nicht zu S. Der Raum muss viel größer werden. Dazu gibt es einen Trick, den man Dualisierung nennt. Dies bringt uns zu den Distributionen.

Distributionen

Wir erinnern zunächst an den Begriff des Funktionals. Eine lineare Abbildung

$$f : X \to \mathbb{K}\,, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

heißt Funktional, wobei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ bedeutet. Die Abbildung f hat also die beiden Eigenschaften

$$f(x + y) = f(x) + f(y)\,, \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)\,, \quad \forall x, y \in X\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}\,.$$

Um lineare stetige Funktionale auf S zu erklären, benötigen wir einen Konvergenzbegriff in S.

Definition 5.42 **Konvergenz in S**

Eine Folge von Testfunktionen $(\varphi_n) \subset S$ konvergiert gegen $\varphi \in S$, wenn alle φ_n und φ gemeinsam außerhalb eines geeigneten Intervalls verschwinden und wenn außerdem die φ_n gleichmäßig gegen φ und alle Ableitungen $\varphi_n^{(k)}$ gleichmäßig gegen die Ableitung $\varphi^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergieren.

$$\text{Symbol:} \quad \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} \varphi\,.$$

Für die Konvergenz von $(\varphi_n) \subset S$ gegen $\varphi \in S$ hat man also nachzuweisen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein geeignetes $r > 0$ gilt

$$\varphi_n(t) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(t) = 0 \quad \text{für} \quad |t| \geq r$$

und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Beispiel 5.43

1. Die Folge (φ_n) mit $\varphi_n := \frac{1}{n}\,\varphi,\ \varphi \in S$, konvergiert in S gegen die Nullfunktion:

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} 0\,,$$

denn alle Ableitungen $\varphi^{(k)}$ sind beschränkt und daher folgt

$$\varphi_n^{(k)}(t) = \frac{1}{n}\,\varphi^{(k)}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gleichmäßig.

2. Die Folge $(\psi_n) \subset S$,

$$\psi_n(t) := \frac{1}{n}\,\varphi\left(\frac{t}{n}\right) := \begin{cases} \frac{c}{n}\, e^{-n^2/(n^2-t^2)}\,, & \text{für } \ |t| < n \\ 0\,, & \text{für } \ |t| \geq n \end{cases}$$

konvergiert zwar ebenfalls gleichmäßig gegen die Nullfunktion, jedoch nicht im Sinne der S-Konvergenz, da kein gemeinsames beschränktes Intervall existiert, das Träger aller ψ_n ist.

Definition 5.44 Distribution

Unter einer Distribution (auch verallgemeinerte Funktion) versteht man ein lineares stetiges Funktional F auf dem Grundraum $S(\mathbb{R})$. Die Menge aller dieser Distributionen bezeichnen wir mit $S'(\mathbb{R})$ oder auch nur mit S' und nennt diese auch temperierte Distributionen.

Die Distributionstheorie ist das Studium linearer stetiger Abbildungen auf dem Raum S der Testfunktionen. Darüber hinaus gibt es auch noch andere Räume von Testfunktionen, auf die hier nicht eingegangen wird. Allen diesen Räumen ist gemeinsam, dass sie ein mathematisches Modell für Impulse und einen Differentiationsbegriff auch für Funktionen mit Sprungstellen ermöglichen.

Die Dirac-Delta-Distribution

In manchen Anwendungen hat man es mit linearen inhomogenen Differenzialgleichungen zu tun, in denen von der nur kurzzeitig wirkenden Störfunktion $f(t)$ (etwa bei einem Hammerschlag, bei Punktkräften oder beim Stromstoß) nur der Gesamtimpuls $\int_{t_2}^{t_1} f(t)\,dt,\ t_1$ nahe bei t_0 bekannt ist. Man spricht dann von einer Impulsfunktion (siehe Abb. 5.29 a)). Eine Impulsfunktion ist für kleines $\varepsilon > 0$ durch

$$\delta(t;\varepsilon) := \begin{cases} 0\,, & -\infty < t < 0 \\ 1/\varepsilon\,, & 0 < t < \varepsilon \\ 0\,, & \varepsilon < t < \infty \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t;\varepsilon)\,dt = 1$$

gegeben.

Soll der Gesamtimpuls auf einen Zeitpunkt $t = t_0$ konzentriert sein, dann müsste durch

$$\delta(t) := \lim_{\varepsilon\to 0} \delta(t;\varepsilon) = \begin{cases} 0\,, & t \neq 0 \\ \infty\,, & t = 0 \end{cases}$$

eine „Funktion" erklärt sein, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{5.65}$$

gilt. Dies ist im strengen mathematischen Sinn nicht möglich, da weder ∞ ein Funktionswert ist, noch (5.65) als Riemann-Integral existiert. Obwohl $\delta(t)$ als Funktion von $t \in \mathbb{R}$ nicht definiert werden kann, ist es sinnvoll, den Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ aus den Mittelwerten $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0; \varepsilon)\, \varphi(t)\, dt$ für jede Testfunktion φ zu bilden. Man definiert daher den δ-Impuls nicht punktweise für $t \in \mathbb{R}$, sondern durch Integralwerte mit Testfunktionen $\varphi \in S$. Deshalb kann der δ-Impuls durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, \varphi(t)\, dt := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0; \varepsilon)\, \varphi(t)\, dt \tag{5.66}$$

erklärt werden. Die Schreibweise $\delta(t)$ für den δ-Impuls dient lediglich dem Hinweis auf die Integrationsvariable und nicht, dass einzelnen Stellen t ein Funktionswert zugeordnet wird. Schreibt man formal $\delta(t - t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta(t - t_0; \varepsilon)$, dann entspricht (5.66) einer formalen Vertauschung der Grenzwertbildung mit der Integration, die jedoch beim Riemann-Integral nicht ohne Weiteres zulässig ist. $\delta(t)$ ist deshalb keine klassische Funktion von t, sondern eine verallgemeinerte Funktion oder Distribution, die nach P. Dirac auch als Dirac-Delta-Distribution oder kurz als δ-Impuls bezeichnet wird. Wir geben jetzt die strenge mathematische

Definition 5.45 **Dirac-Delta-Distribution**

Die Abbildung

$$\delta_{t_0} : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \delta_{t_0}(\varphi) := \varphi(t_0) \tag{5.67}$$

heißt Dirac-Delta-Distribution. Für δ_0 schreiben wir auch nur δ.

Um die Bezeichnung Distribution für das Funktional δ_{t_0} zu rechtfertigen, müssen wir uns überlegen, dass δ_{t_0} linear und stetig im Sinne der Konvergenz des Raumes S ist. Die Linearität von δ_{t_0} ist offensichtlich. Verbleibt zu zeigen, dass aus $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} 0$ stets $\delta_{t_0}(\varphi_n) \to 0$ folgt. Aus $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} 0$ folgt sofort $|\varphi_n(t_0)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_n(t)| \to 0$ und damit $\delta_{t_0}(\varphi_n) = \varphi_n(t_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, was die Stetigkeit beweist.

In der physikalischen Literatur wird die Schreibweise $\delta(t - t_0)$ für die Delta-Distribution verwendet. Darunter versteht man den Ausdruck $\delta(t - t_0)(\varphi) = \varphi(t_0)$. Wohlgemerkt: Mit $\delta(t - t_0)$ meint man also nicht die Delta-Distribution an der Stelle $t - t_0$, sondern man hat diese Schreibweise an die symbolische Beziehung

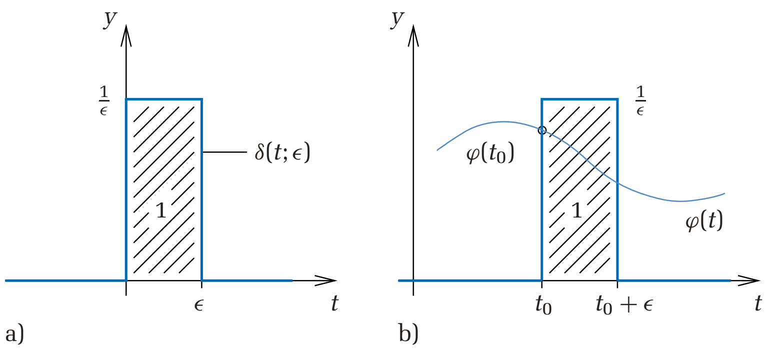

Abbildung 5.29: a) Impulsfunktion, b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t-t_0;\varepsilon)\,dt$

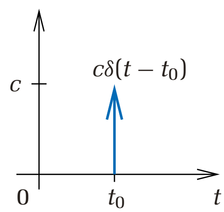

Abbildung 5.30: Die Distribution $c\,\delta(t-t_0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ \varphi(t)\,dt = \varphi(t_0)$ angelehnt. Diese Schreibweise ist insbesondere dann zweckmäßig, wenn man mit linearen stetigen Funktionalen über $S(\mathbb{R}^n)$ arbeitet und einzelne Variable auszeichnen muss. Für $c \in \mathbb{R}$ ist also $c\,\delta(t-t_0)$ gegeben durch $c\,\delta(t-t_0)(\varphi) = c\,\varphi(t_0)$. Grafisch wird die Delta-Distribution durch einen Pfeil der Höhe c im Punkt $t = t_0$ repräsentiert (siehe Abb. 5.30).

Beispiel 5.46

Gegeben sind die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f_n, g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f_n(t) := \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}\,, \quad g_n(t) := \begin{cases} n\,, & 0 < t \le 1/n\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Wir zeigen, dass die Folgen (f_n) und (g_n) im distributionellen Sinn gegen die Diracsche Delta-Distribution δ_0 konvergieren.

Wir fassen (f_n) bzw. (g_n) als eine Folge von Distributionen auf, indem wir jedem f_n bzw. g_n die Distribution

$$U_n(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(t)\,\varphi(t)\,dt\,, \quad V_n(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(t)\,\varphi(t)\,dt\,, \qquad \varphi \in S(\mathbb{R})$$

zuordnen und zeigen, dass

$$U_n(\varphi),\ V_n(\varphi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$$

konvergieren.

1. Wir weisen $U_n(\varphi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)$ nach. Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\,dt}{\pi(1+n^2\,t^2)}\,dt = 1\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,\varphi(t)\,dt - \varphi(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,\varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(0)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt = \int_{-\infty}^{-a} f_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt \\
&\quad + \int_{-a}^{a} f_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt + \int_{a}^{\infty} f_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt
\end{aligned}$$

wobei $\operatorname{supp}\varphi = [-a, a],\ a > 0$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt\right| \\
&\le |\varphi(0)| \int_{-\infty}^{-a} f_n(t)\,dt + \left|\int_{-a}^{a} f_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt\right| + |\varphi(0)| \int_{a}^{\infty} f_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\int_{-\infty}^{-a} \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-an} \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{\pi}\ \arctan n\Big|_{-\infty}^{-an} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Damit konvergiert $|\varphi(0)| \int_{-\infty}^{-a} f_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und eine analoge Rechnung liefert auch $|\varphi(0)| \int_a^{\infty} f_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Somit verbleibt zu zeigen, dass

$$\left|\int_{-a}^{a} f_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

konvergiert. Wegen $|\varphi(t)-\varphi(0)| \le \max\limits_{t\in[-a,a]} |\varphi'(t)|\ |t|$ folgt

$$\left|\int_{-a}^{a} f_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt\right| \le \int_{-a}^{a} f_n(t)|\varphi(t)-\varphi(0)|\,dt \le \max_{t\in[-a,a]} |\varphi'(t)| \int_{-a}^{a} |t| f_n(t)\,dt\,.$$

Nun ist

$$\frac{n}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{t}{1+n^2\,t^2}\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{nt}{1+n^2\,t^2}\,dt=\frac{1}{\pi n}\int_{0}^{a}\frac{2n^2t}{1+n^2\,t^2}\,dt$$
$$=\frac{1}{\pi n}\,\ln(1+n^2\,t^2)\big|_0^a=\frac{1}{\pi n}\,\ln(1+n^2\,a^2)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\,.$$

Dies zeigt, dass $U_n(\varphi)\to\delta_0(\varphi)=\varphi(0)$ für alle $\varphi\in S(\mathbb{R})$ konvergiert (siehe Abb. 5.31).

2. Es ist

$$V_n(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}g_n(t)\,\varphi(t)\,dt=\int_{0}^{1/n}n\varphi(t)\,dt$$
$$=\varphi(\xi)\int_{0}^{1/n}n\,dt=\varphi(\xi)\cdot n\cdot\frac{1}{n}\,,\quad \xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right).$$

Dabei wurde wieder der Mittelwertsatz der Integralrechnung verwendet.

Der Grenzübergang $n\to\infty$ liefert $V_n(\varphi)\to\varphi(0)=\delta_0(\varphi)$ für alle $\varphi\in S(\mathbb{R})$.

Wir wollen nun eine Klasse temperierter Distributionen kennen lernen.

▶ **Satz 5.47** Sei $v\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion und beschränkt auf $\mathbb{R}$. Dann ist durch

$$T_v(\varphi):=\int_{-\infty}^{\infty}v(t)\,\varphi(t)\,dt\,,\quad \varphi\in S(\mathbb{R})\tag{5.68}$$

eine temperierte Distribution definiert, d. h. es gilt $T_v\in S'(\mathbb{R})$. ■

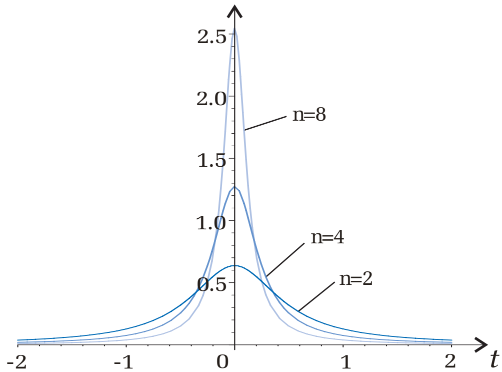

Abbildung 5.31: Die Funktionenfolge $f_n(t)=\dfrac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$ mit $n=2,\,4,\,8$

Beweis Es muss gezeigt werden: Aus $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} \varphi$ folgt $T_v(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} T_v(\varphi)$. Da die φ_n und φ zu S gehören, gilt

$$\Delta_n := \sup\{\, t \in \mathbb{R} \mid (1+t^2)\,|\varphi_n(t) - \varphi(t)|\,\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Hieraus folgt

$$|T_v(\varphi_n - \varphi)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|v(t)|}{1+t^2}\,(1+t^2)|\varphi_n(t) - \varphi(t)|\,dt \le \text{const}\cdot \Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

□

Solche Distributionen heißen auch *reguläre Distributionen*. Die Dirac-Delta-Distribution lässt sich nicht in der Form (5.68) darstellen und wird deshalb als *singuläre Distribution* bezeichnet. Es ist möglich, eine ganze Reihe von Rechenregeln für Distributionen aufzustellen. Wir wollen uns hier auch im Hinblick auf Differenzialgleichungen auf die Einführung eines geeigneten Ableitungsbegriffes für Distributionen konzentrieren. Dabei orientieren wir uns am klassischen Ableitungsbegriff für differenzierbare Funktionen. Es sei dazu f eine absolut integrierbare Funktion mit stetiger und beschränkter Ableitung. Dann wird mit f' nach Satz 5.47 eine Distribution $T_{f'}$ definiert. Mit partieller Integration folgt für jedes $\varphi \in S$ die Beziehung

$$T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)\,\varphi(t))'\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,dt\,. \tag{5.69}$$

Wir wählen $a > 0$ so, dass φ für $|t| \ge a$ verschwindet. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t)\,\varphi(t))'\,dt = \int_{-a}^{a} (f(t)\,\varphi(t))'\,dt = f(t)\,\varphi(t)\Big|_{t=-a}^{t=a} = 0\,.$$

Damit folgt aus (5.69)

$$T_{f'}(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,dt = -T_f(\varphi')\,. \tag{5.70}$$

Die Beziehung (5.70) nehmen wir zum Anlass für die

Definition 5.48 **Ableitung einer Distribution**

Die Ableitung T' einer Distribution $T \in S'(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') \quad \text{für alle} \quad \varphi \in S(\mathbb{R})\,. \tag{5.71}$$

Wir bemerken, dass $T'(\varphi)$ einen Sinn macht, da T eine Distribution und mit $\varphi \in S$ auch stets $\varphi' \in S$ ist. Die Formel (5.71) zeigt uns einen Weg, wie man neue Distributionen gewinnen kann, denn $T'(\varphi)$ ist wieder eine Distribution. Die durch (5.71) definierte

Distribution T' besitzt wieder eine Ableitung. Wie bei Funktionen wird diese Distribution zweite Ableitung genannt und mit T'' bezeichnet. Die zweimalige Anwendung der Definition 5.48 hat zur Folge:

$$T''(\varphi) = T(\varphi'') \quad \text{für alle } \varphi \in S(\mathbb{R})\,.$$

Dieser Prozess kann immer wieder durchgeführt werden mit dem Ergebnis, dass Distributionen beliebig oft differenziert werden können. Allgemein gilt

$$T^{(k)}(\varphi) = (-1)^k\, T(\varphi^{(k)}) \quad \text{für alle } \varphi \in S(\mathbb{R})\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Im Hinblick auf Satz 5.47 heißt dies auch, dass jede absolut integrierbare Funktion bzw. jede stückweise stetige und beschränkte Funktion, betrachtet als Distribution, beliebig oft differenzierbar ist.

Beispiel 5.49

Mit dem Ableitungsbegriff für Distributionen zeigen wir, dass die Heaviside-Funktion $h(t) = \begin{cases} 1\,, & t \geq 0\,, \\ 0\,, & t < 0\,, \end{cases}$ aufgefasst als Distribution, differenzierbar im Sinne von Definition 5.48 ist und das als distributionelle Ableitung die Dirac-Distribution herauskommt. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} H'(\varphi) = -H(\varphi') &= -\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\int_0^{\infty} 1\,\varphi'(t)\,dt \\ &= -\lim_{A\to\infty}\,[\varphi(A) - \varphi(0)] = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)\,, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

Man schreibt dafür kurz: $h' = \delta_0$.

Beispiel 5.50

Wir berechnen die Ableitung der Funktion $t \mapsto |t|$, $t \in \mathbb{R}$, natürlich aufgefasst als Distribution.

$$\begin{aligned} T'_{|t|}(\varphi) = -T_{|t|}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} |t|\,\varphi'(t)\,dt &= -\int_0^{\infty} t\,\varphi'(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} t\varphi'(t)\,dt \\ &= -t\,\varphi(t)\big|_0^{\infty} + t\,\varphi(t)\big|_{-\infty}^{0} + \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} t \cdot \varphi(t)\,dt = T_{\operatorname{sign} t}(\varphi)\,, \quad \varphi \in S(\mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung haben wir die partielle Integration und die Tatsache, dass $\lim_{t\to\pm\infty} t\,\varphi(t) = 0$ (wegen $\varphi \in S(\mathbb{R})$), verwendet. Wir schreiben wieder kurz: $|t|'(\varphi) = \operatorname{sign} t(\varphi)$, $\varphi \in S(\mathbb{R})$ bzw. $|t|' = \operatorname{sign} t$ (im distributionellen Sinn).

Beispiel 5.51

Wir betrachten die Funktion

$$g(t) := h(t)\cos t, \quad h(t) := \begin{cases} 1\,, & t \geq 0 \\ 0\,, & t < 0 \end{cases}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

und berechnen ihre distributionelle Ableitung T'. Die Funktion g hat in $t = 0$ einen Sprung der Größe 1. Mit partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} T'(\varphi) = -T(\varphi') &= -\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\cos t\,\varphi'(t)\,dt = -\int_{0}^{\infty} \cos t\,\varphi'(t)\,dt \\ &= -\varphi(t)\cos t\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \sin t\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0) - \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin t\,\varphi(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Der Leser möge sich die Existenz der uneigentlichen Integrale überlegen. In unserer Kurzschreibweise lautet die Ableitung von g:

$$(h(t)\cos t)' = \delta(t) - h(t)\sin t\,.$$

Die Abb. 5.32 zeigt den Graph von g und die dazugehörige distributionelle Ableitung.

Merkregel für distributionelle Ableitungen: Hat eine Funktion f bei $t = t_0$ einen „Knick“ bzw. einen Sprung bei $t = t_1$ und ist sie sonst differenzierbar, so entsteht bei der distributionellen Ableitung f' bei t_0 ein Sprung von $f'(t_0 - 0)$ auf $f'(t_0 + 0)$ bzw. bei t_1 ein δ-Impuls der Stärke $|f(t_1 + 0) - f(t_1 - 0)|$.

Wir definieren die Multiplikation einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ mit einer Distribution $T \in S'(\mathbb{R})$.

Definition 5.52 Multiplikation

Für $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ und $T \in S'(\mathbb{R})$ wird erklärt:

$$f(t) \cdot T(\varphi) := T(f(t)\varphi)\,. \tag{5.72}$$

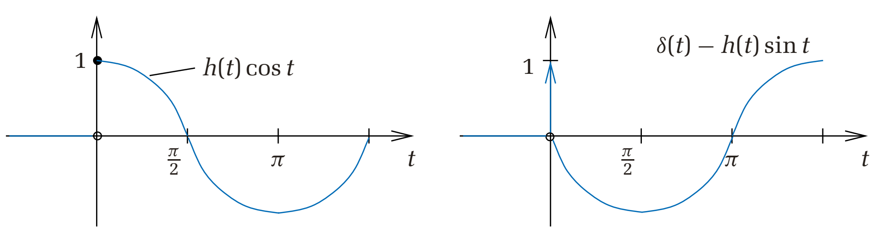

Abbildung 5.32: Die Funktion $h(t)\cos t$ (links) und ihre distributionelle Ableitung (rechts)