et
elektrotechnik

mb
maschinenbau

Armin Hoffmann
Bernd Marx
Werner Vogt

Mathematik für Ingenieure 1

Lineare Algebra, Analysis – Theorie und Numerik

Prentice Hall

PEARSON
Studium

A. Hoffmann
B. Marx
W. Vogt

Mathematik für Ingenieure

Lineare Algebra, Analysis – Theorie und Numerik

1. Auflage

PEARSON Studium

ein Imprint von Pearson Education
München • Boston • San Francisco • Harlow, England
Don Mills, Ontario • Sysney • Mexico City
Madrid • Amsterdam

Beweis Zu 1. Klar nach Definition 8.11.

Zu 2. $|A| = \sum_{\pi \in \sigma_J} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n}$. Jeder Summand enthält Faktoren aus jeder Zeile und Spalte, wobei es keine Doppelzählungen gibt. Außer bei $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ ist immer ein Faktor unterhalb der Hauptdiagonale dabei, welcher Null ist.

Zu 3. Nach Satz 8.10 9 ist $\varepsilon_{j_1\dots j_n} a_{j_1 1} \cdots a_{j_n n}$ eine Determinantenform mit $|(e_1, \dots, e_n)| = \varepsilon_{j_1\dots j_n} \delta_{j_1 1} \cdots \delta_{j_n n} = \varepsilon_{1\dots n} = 1$.

Zu 4. A regulär $\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$ Basis des $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow |A| \neq 0$.

Zu 5. Sind $i_1, \dots, i_n$ die Bilder von $1, \dots, n$ bzgl. π, dann sind $i_n, \dots, i_1$ die Bilder von $1, \dots, n$ bzgl. π^{-1}. Aus der Kommutativität der Zahlenprodukte folgt dann $a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n} = a_{1\pi^{-1}(1)1} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)}$. π^{-1} durchläuft wie π ebenfalls alle Permutationen aus σ_J.

Zu 6–8. Klar.

Definition 8.15 Algebraisches Komplement

Sei $A = (a_{ik})_{nn} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Unter dem algebraischen Komplement A_{ik} von a_{ik} bezüglich A verstehen wir die Matrix, die aus A entsteht, wenn wir von A die i–te Zeile und die k–te Spalte streichen (a_{ik} steht im Kreuzungspunkt dieser Zeile und Spalte).

Beispiel 8.16

Sei $A = \begin{pmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{pmatrix}$.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} -35 & 50 \\ 79 & 49 \end{pmatrix}, \qquad A_{32} = \begin{pmatrix} -85 & -37 \\ -35 & 50 \end{pmatrix}, \qquad A_{23} = \begin{pmatrix} -85 & -55 \\ 79 & 56 \end{pmatrix}.$$

Der folgende Satz, wir verzichten auf seinen Beweis, lässt sich auch mit Hilfe der Eigenschaften der Permutationen zeigen. Er reduziert die Berechnung einer Determinante n-ter Ordnung auf die Berechnung von n Determinanten der Ordnung $n-1$. Er wird häufig bei der Berechnung von Determinanten eingesetzt, wenn nur einzelne Zeilen oder Spalten „beseitigt“ werden sollen, so z. B. beim Kreuzprodukt oder bei der Entwicklung von Formeln in der Geometrie (Ebenengleichung, Kreisgleichung in Determinantengestalt) oder bei theoretischen Formeln zur Lösung von linearen

Gleichungssystem (Kramersche Regel, Adjunktenformel für die inverse Matrix). Wendet man diesen Satz auf eine vollbesetzte Matrix immer wieder an, so erhält man wiederum die obige Permutationsformel, die zur praktischen Berechnung einer Determinante denkbar ungeeignet ist.

Satz 8.17 **Entwicklungssatz 1**

(Summationsabkommen außer Kraft) $\det A$ lässt sich durch die **Entwicklung nach der Spalte** k [**nach der Zeile** i] wie folgt berechnen

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i}\, a_{ik}\, |A_{ik}| \left[= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i}\, a_{ik}\, |A_{ik}| \right].$$

Bemerkung 8.18

Man kann auch nach mehreren Zeilen (Spalten) gleichzeitig entwickeln. Wählt man z. B. die 1. und 2. Zeile aus, dann hat man **alle** Kombinationen von 2 Spalten (Zeilen) zu bilden, das sind $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten. Durch Streichen der 1. und 2. Zeile (Spalte) sowie der jeweiligen ausgewälten 2 Spalten (Zeilen) entsteht eine $(n-2)$-reihige quadratische Matrix. Die Summe der Produkte aus den Determinanten der zweireihigen und der $(n-2)$-reihigen Matrix ergibt dann mit geeigneten sich aus zugehörigen Permutationen ergebenden Vorzeichen wiederum $\det A$. Wegen der Komplexität bei der Auswahl der Spalten (Zeilen) findet diese Variante bei praktischen Berechnungen kaum Anwendung.

Beispiel 8.19

Die einfachen Regeln für Determinanten der Ordnung 1, 2 und 3 (Sarrus) sind auf Determinanten höherer Ordnung als 3 nicht erweiterbar. Sie ergeben sich unmittelbar aus der Permutationsdarstellung. Für $n = 1$ ist die Schreibweise $|A|$ für $\det A$ ungünstig. Viele Formelmanipulationssysteme bevorzugen auch die Schreibweise $\det A$.

$$\det(a_{11}) = a_{11}\,, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (\searrow) - (\nearrow) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \; \overbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}}^{\text{Eränzungsspalten}} = \overbrace{(\searrow + \searrow + \searrow)}^{\text{3 Produkte } +} \overbrace{-(\nearrow + \nearrow + \nearrow)}^{\text{3 Produkte } -}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})\,.$$

Beispiel 8.20

Wir berechnen die Determinante nach Sarrus und entwickeln zur Demonstration auch nach der 2. Zeile.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -8 & -5 & -3 \\ -3 & 9 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} &= (-8\cdot 9\cdot 4) + (-5\cdot 5\cdot 7) + (-3\cdot(-3)\cdot 5) \\
&= -(7\cdot 9\cdot(-3)) - (5\cdot 5\cdot(-8)) - (4\cdot(-3)\cdot(-5)) = -418-(-329) = -89 \\
&= (-1)^{2+1}(-3)\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\,9\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\,5\begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-3)(-5) + 9(-11) + (-1)\,5\,(-5) = -89\,.
\end{aligned}$$

Schneller ist man bei Determinanten **höherer Ordnung** in der Regel mit der Ausnutzung der 3 Eigenschaften, dass

1. **das Vielfache einer Zeile (Spalte), das gleiche Vielfache der Determinante erzeugt.**
2. **sich der Wert der Determinante nicht ändert, wenn das Vielfache einer Zeile (Spalte) zu einer anderen (!!) Zeile (Spalte) addiert wird.**
3. **das Vertauschen von zwei Zeilen (Spalten) das Vorzeichen der Determinante ändert.**

Hierdurch kann man analog dem Gaußalgorithmus indexVerfahren!Gauß~ unter Vermeidung von Brüchen in der Matrix auf Dreiecksgestalt transformieren, so dass sich $\det A$ als Produkt des eventuellen Vorfaktors und der Hauptdiagonalelemente der entstandenen Dreicksmatrix ergibt.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -8 & -5 & -3 \\ -3 & 9 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} &= \frac{1}{8}\frac{1}{8}\begin{vmatrix} -8 & -5 & -3 \\ -24 & 72 & 40 \\ 56 & 40 & 32 \end{vmatrix} = \frac{1}{64}\begin{vmatrix} -8 & -5 & -3 \\ 0 & 87 & 49 \\ 0 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -\frac{1}{64}\begin{vmatrix} -8 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 87 & 49 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{320}\begin{vmatrix} -8 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 435 & 245 \end{vmatrix} = -\frac{1}{320}\begin{vmatrix} -8 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & -712 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{(-8)\,5\,(-712)}{320} = -89\,.
\end{aligned}$$

Satz 8.21 Kramersche Regel

Sei $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix und $b \in \mathbb{K}^n$. Dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Die Koordinaten $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, lassen sich folgendermaßen über Determinanten darstellen

$$x_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A}\,.$$

Beweis Aus der Multilinearität der Determinante in Bezug auf ihre Spalten folgt unmittelbar die folgende Gleichungskette.

$$\begin{aligned}
&\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)\\
&= \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, Ax, a_{i+1}, \ldots, a_n)\\
&= \det\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_j x_j, a_{i+1}, \ldots, a_n\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)\\
&= x_i \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) + 0\,.
\end{aligned}$$

Der folgende Begriff kennzeichnet die Determinante spezieller aus einer Matrix auswählbarer Teilmatrizen. Sie dienen in der Theorie der linearen Gleichungssysteme und Gebieten, in denen Matrizen eine große Rolle spielen, zur Abschätzung des Ranges von Matrizen.

Definition 8.22 Minor, Hauptminor

Streichen wir in einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $\min\{m, n\} - r$ Zeilen und Spalten, dann entsteht eine Matrix $M \in \mathbb{K}^{r \times r}$. $\det M$ nennen wir einen Minor r-ter Ordnung von A. Wählen wir bei einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $n - r$ Elemente der Hauptdiagonalen heraus und streichen die zugehörigen $n - r$ Zeilen und Spalten, so entsteht ebenfalls eine Matrix H mit r Zeilen und Spalten. $\det H$ heißt Hauptminor der Ordnung r.

Beispiel 8.23

Sei $A = \begin{pmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \\ 63 & 57 & -59 \end{pmatrix}$. Dann sind z. B. $\begin{vmatrix} 97 & 50 \\ 56 & 49 \end{vmatrix} = 1953$ und $\begin{vmatrix} -85 & -37 \\ 63 & -59 \end{vmatrix} = 7346$ Minoren 2. Ordnung. Für $A = \begin{pmatrix} 45 & -8 & -93 \\ 92 & 43 & -62 \\ 77 & 66 & 54 \end{pmatrix}$ ist z. B. $\begin{vmatrix} 45 & -93 \\ 77 & 54 \end{vmatrix}$ ein Hauptminor der Ordnung 2, wogegen zwar $\begin{vmatrix} 92 & 43 \\ 77 & 66 \end{vmatrix}$ ein Minor, jedoch kein Hauptminor 2. Ordnung ist .

Satz 8.24 Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Ist mindestens ein Minor $r-$ter Ordnung ungleich Null , dann folgt $\operatorname{rg} A \geq r$. Sind alle Minoren der Ordnung r gleich Null, dann folgt $\operatorname{rg} A < r$. Sind alle Minoren der Ordnung $r+1$ gleich Null und mindestens ein Minor der Ordnung r ungleich Null, dann gilt $\operatorname{rg} A = r$.

Beweis Wenn ein Minor der Ordnung r ungleich Null ist, folgt die lineare Unabhängigkeit der zugehörigen Spalten bzw. Zeilen von A. Sind alle Minoren der Ordnung r Null, so sind beliebige r Zeilen oder Spalten in A stets linear abhängig. Aus $\operatorname{rg} A \geq r$ und $\operatorname{rg} A < r+1$ folgt $\operatorname{rg} A = r$.

Wir benutzen jetzt das algebraische Komplement zu jedem Element einer regulären quadratischen Matrix, um mit Hilfe der Kramerschen Regel eine Formel für die inverse Matrix herzuleiten. Wir benötigen dazu den folgenden Begriff.

Definition 8.25 **Adjunkte**

Sei $A = (a_{ik})_{nn} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und A_{ik} das algebraische Komplement zu a_{ik}. Dann nennen wir $\operatorname{Adj}(A) = (\alpha_{ik})_{nn}$ mit $\alpha_{ik} = (-1)^{i+k} \det A_{ik}$ die Adjunkte von A.

Satz 8.26 **Adjunktenformel der inversen Matrix**

Sei $A = (a_{ik})_{nn} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär. Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}\left(A^T\right) = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}(A)^T .$$

Beweis Sei $AX = I$. Wir verwenden die Kramersche Regel für die n Gleichungssysteme $Ax_k = e_k$, $k = 1, 2, .., n$, mit $X = (x_1, \dots, x_n) = (x_{ik})_{nn}$. Es folgt

$$x_{ik} = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_k, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A} = \frac{\alpha_{ki}}{\det A} ,$$

für $i = 1, 2, \dots, n$.

Beispiel 8.27

Wir berechnen die Inverse von $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Analog könnte man sich über MAPLE auch die Formeln für A^{-1} für $n = 3, 4, \ldots$ berechnen lassen. Bereits für $n = 5$ werden sie sehr umfangreich und sind praktisch kaum noch sinnvoll verwendbar. Daher spielt die Formel für die Inverse über die Adjunkte wie auch die Kramersche Regel hauptsächlich in theoretischen Abhandlungen eine tragende Rolle. Die leicht zu merkende Formel für $n = 2$ wird dagegen auch häufig in der Praxis benutzt.

Z U S A M M E N F A S S U N G

In diesem Kapitel haben wir einen kleinen Ausflug in die multilineare Algebra unternommen, aber nur so weit, wie wir es für spätere Ausführungen benötigen. Eine umfassende und kurze theoretische Darstellung findet man z. B. in [51]. Nur an Hand eines Beispieles haben wir den Begriff des Tensors aus der Basisdarstellung einer p-linearen Abbildung herausgearbeitet. Ein und derselbe Tensor $D = d_{i_1 \cdots i_p} \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_p}$ kann durch unterschiedliche Anwendungen auf entsprechende Argumente eine multilineare Abbildung, eine multilineares Funktional oder sogar eine lineare Abbildung in einen entsprechenden linearen Raum erzeugen. In der Praxis steht für solch ein Tensor der Stufe p eine p-fach indizierte Größe $d_{i_1 \cdots i_p}$ die in Bezug auf jeden Index je nach Kontra- oder Kovarianz den gleichen Transformationsgesetzen genügt, wie wir sie bereits bei Vektoren im $\mathbb{K}^n$ (kontravarianter Index, Tensor 1. Stufe) und linearen Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$ (1. Index kontravariant, 2. Index kovariant, Tensor 2. Stufe) kennen gelernt haben. Bei mehr als 2 Indizes wird die bisherige Matrixnotation und Spalten(Zeilen)vektornotation durch die Indexnotion und dabei oft mit dem zugehörigen Einsteinschen Summationsabkommen ersetzt.

Index j	Tensorbasiselement $\otimes_{j=1}^{p} \xi_j$	Transformation mit
kovariant	$\xi_j = b_j^* \in X^*\,,\ \ \xi_j = c_j^* \in Y^*$	$S = (s_{ik})_{nn}\,,\ \ T = \left(t_{\alpha\beta}\right)_{mm}$
kontravariant	$\xi_j = \vec{b}_j \in X\,,\ \ \xi_j = \vec{c}_j \in Y$	$S^{-1} = (\hat{s}_{ik})_{nn}\,,\ \ T^{-1} = \left(\hat{t}_{\alpha\beta}\right)_{mm}$

z. B. für $D = d_{ij\alpha\beta} b_i^* \otimes \vec{b}_j \otimes \vec{c}_\alpha \otimes c_\beta^*$ haben wir bei $\underline{B} = BS$ in X und $\underline{C} = CT$ in Y folgendes Transformationsverhalten

$$\underline{d}_{\underline{ij\alpha\beta}} = d_{ij\alpha\beta}\ s_{i\underline{i}}\ \hat{s}_{\underline{jj}}\ \hat{t}_{\alpha\underline{\alpha}}\ t_{\beta\underline{\beta}}$$

und für $\vec{x} = Bx, u^* = u^T B^*, \vec{y} = Cy, v^* = v^T C^*$ ergibt die Anwendung von D auf diese Argumente

$$D(\vec{x}, u^*, \vec{y}, v^*) = d_{ij\alpha\beta} x_i u_j y_\alpha v_\beta$$

eine Zahl aus $\mathbb{K}$. Damit genügt es, die $d_{ij\alpha\beta}$ und ihre Transformationsvorschrift zu kennen, um mit D zu arbeiten.

Im Tensorkalkül kennzeichnet man die Art des Indexes bei den Koordinaten durch Index oben (kontravariant) oder Index unten(kovariant). Bei den Basen ist es genau umgekehrt. Über gleiche Indizes in einem optisch als Produkt erscheinenden Ausdruck wird über den vereinbarten Laufbereich summiert. Damit darf in solch einem optisch als Produkt erscheinenden Ausdruck jeder Index höchstens zweimal auftauchen.

Mit multilinearen Abbildungen lassen sich Polynome in mehreren Verä nderlichen notieren wie z.b. ein Polynom 3. Ordnung mit Werten in $\mathbb{K}$ $P(\vec{x}) = d + d_i x_i + d_{ij} x_i x_j + d_{ijk} x_i x_j x_k$. Hier sind die Tensoren $d_{i_1 \cdots i_p}$ symmetrisch in Bezug auf die Stellung der Indizes.

Der wichtige Spezialfall der Determinantenform als antisymmetrisches $\dim X$-lineares Funktional, welches auf allen linear abhängigen Argumenten verschwinden soll und auf einer Basis einen Wert $\gamma \neq 0$ liefert, führt uns bis auf den Faktor γ zum antisymmetrischen ε-Tensors $\varepsilon_{i_1 \cdots i_n}$, der hier die tragende Rolle spielt. Der Wert einer Determinantenform in Bezug auf die $\vec{x}_i$ und in Bezug auf das Bild $L\vec{x}_i$ eines linearen Endomorphismus über X unterscheidet sich nur um einen von der Basis und der Determinantenform unabhängigen Faktor. Diesen nennen wir $\det L$ oder $|L|$. Es zeigte sich, dass die zugehörige Matrix A als linearer Endomorphismus des $\mathbb{K}^n$, $\dim X = n$, die gleiche Determinante besitzt. Aus den Rechenregeln für Determinantenformen ergeben sich unmittelbar Eigenschaften und elementare Berechnungsregeln für Determinanten, die praktisch mit der Reduktion nach Gauß zusammenfallen, da wir gesehen haben, dass die Determinante einer quadratischen Dreiecksmatrix mit dem Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente übereinstimmt. Die Permutationsformel gibt uns den wichtigen Entwicklungssatz für Determinanten, der für das theoretische Arbeiten mit Determinanten von großer Bedeutung ist. Wir erhielten mit ihm eine Formel für die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit reguärer quadratischer Matrix (Kramersche Regel) sowie eine Formel für die Berechnung der inversen Matrix über die Adjunkten (Determinanten der algebraischen Komplemente). Mit Determinanten lässt sich theoretisch auch der Rang einer linearen Abbildung bestimmen. Hierzu haben wir den Begriff des Minors geprägt. Der praktischen Berechnung von Determinanten, abgesehen von klein-dimensionierten Matrizen, widmen wir uns im Teil IV, Algorithmus 18.1 (s. auch Gleichung (18.8)).

ZUSAMMENFASSUNG

8.4 Aufgaben

Bei Aufgaben mit $*$ benutzen wir hier das Einsteinsche Summationsabkommen.

1 * **Zeigen sie für den ε-Tensor 3. Stufe mit den nur kovarianten Koordinaten ε_{ijk} in Bezug auf die kanonische Basis I des $\mathbb{R}^3$, d. h. $\varepsilon_{123} = 1$, dass die Koordinaten $\underline{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma}$ bezüglich**

der folgenden Basis $B = \left(b_1, b_2, b_3\right)$, $b_1 = (1,1,0)^T$, $b_2 = (0,1,1)^T$, $b_3 = (1,0,1)^T$ die Eigenschaft $\underline{\varepsilon}_{123} = \pm\sqrt{\det B^T B}$ mit $+$ bei $\det B > 0$ (gleiche Orientierung wie die kanonische Basis) und $-$ bei $\det B < 0$ (entgegengesetzte Orientierung wie die kanonische Basis).

2 * Für das Polynom 2. Grades $P\left(\vec{x}\right) = p + q_i x_i + r_{ij} x_i x_j$ mit $p = 1$, $q = (1,2)^T$, $r = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{x} = Ix$ bzgl. der kanonischen Basis I des $\mathbb{R}^2$ berechne man die (vollständig) kovarianten Koordinaten von den Tensoren q und r in Bezug auf die neue Basis $B = (b_1, b_2)$ mit $b_1 = (1,-1)^T$, $b_2 = (1,1)^T$. Überprüfen Sie Ihre Rechnung für den Punkt $\vec{x} = x_I = (2,3)^T = B\xi$ durch die Berechnung von $P\left(\vec{x}\right)$ mit alten und neuen Koordinaten.

3 Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = (a_{ik})_{nn}$

a $a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq i = k \leq n \\ 2 & \text{für } 1 \leq i = k-1 \leq n-1, 2 \leq i = k+1 \leq n \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

b $a_{ik} = (x_k)^{i-1}$ (Vandermondsche Matrix), $a_{ik} = \binom{k-1+i-1}{k-1}$ (Pascalmatrix),

c $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4 Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

in x, y, z im $\mathbb{R}^3$ eine Ebene durch die drei Punkte $P_i = \left(x_i, y_i, z_i\right)$, $i = 1, 2, 3$, beschreibt.

5 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ nach geeigneter Umformung mit der Kramerschen Regel.

6 Berechnen Sie A^{-1} über die Adjunktenformel für die Matrix $A = (a_{ik})_{33}$.

7 Berechnen Sie für $A = (a_{ik})_{22}$ die Determinante von $A - \lambda I$ und zeigen Sie, dass $|A - \lambda I| = (-\lambda)^2 + (a_{11} + a_{22})(-\lambda) + |A|$. Bestätigen Sie für die Matrix $A = (a_{ik})_{33}$ die Formel $|A - \lambda I| = (-\lambda)^3 +$ (Summe Hauptminoren 1. Ordnung)$(-\lambda)^2 +$ (Summe Hauptminoren 2. Ordnung)$(-\lambda) + |A|$.

8 * Zeigen Sie $\det\left(a_{\lambda\mu}\right)_{33} = \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,a_{i\alpha}a_{j\beta}a_{k\gamma} = (\alpha, \beta, \gamma, i, j, k, \lambda\mu = 1, 2, 3)$.

9 * **Seien** $w, x, y, a, b, c \in \mathbb{K}^3$ **Spaltenvektoren** $I = (e_1, e_2, e_3)$ **in** $\mathbb{K}^3$ **und** ε_{ijk} **die Koordinaten des** ε**-Tensor in Bezug auf die kanonische Basis. Wir definieren** $x \times y := \varepsilon_{ijk} x_j y_k e_i$**. Dann gilt**

a * **Entwicklungssätze für** ε**-Tensor:** $\varepsilon_{iml}\varepsilon_{ijk} = \delta_{mj}\delta_{lk} - \delta_{mk}\delta_{lj}\,,\ \ \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{lk}$,

b **Antisymmetrie:** $x \times y = -y \times x$
Distributivität: $(u + v) \times y = u \times y + v \times y$
Homogenität: $(\lambda x) \times y = x \times (\lambda y) = \lambda(x \times y)$
„Parallelität“: $x \times y = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}\colon\ x = \lambda y$
„Orthogonalität“: $x^T(x \times y) = y^T(x \times y) = 0$,

c **Entwicklungssatz für Kreuzprodukt:** $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = b\left(a^T c\right) - c\left(a^T b\right)$,

d **Formale Berechnung:** $x \times y = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$.

e * **Spatprodukt:** $(wxy) := \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} w_i x_j y_k = w^T(x \times y)$,

f **Lagrange-Identität:** $(a \times b)^T(c \times d) = \left(a^T c\right)\left(b^T d\right) - \left(b^T c\right)\left(a^T d\right)$.

Lineare Abbildungen in Hilberträumen

9

ÜBERBLICK