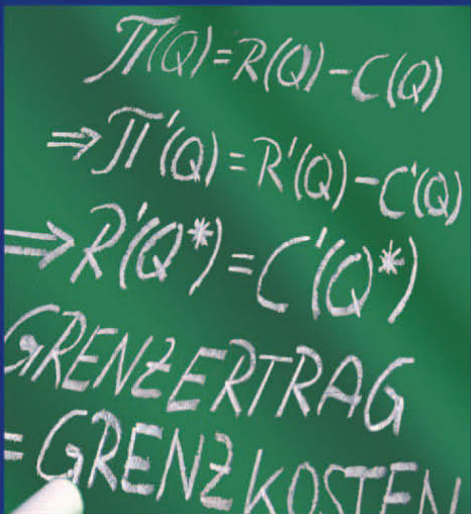


wi
wirtschaft

Fred Böker

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Basiswissen mit Praxisbezug

Das Übungsbuch

PEARSON
Studium

Fred Böker

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Basiswissen mit Praxisbezug

Das Übungsbuch

PEARSON Studium

ein Imprint von Pearson Education
München • Boston • San Francisco • Harlow, England
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City
Madrid • Amsterdam

14.1 Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren

[1] Bestimmen Sie die Lösungskandidaten für die folgenden Probleme. Bestimmen Sie dabei auch den Wert von λ.

a) $\max f(x, y) = -xy$ unter der Nebenbedingung $x - y = 2$

b) $\max f(x, y) = 10xy$ unter der Nebenbedingung $x + 2y = 8$

c) max(min) $4x + 2y$ unter der Nebenbedingung $2x^2 + y^2 = 12$

[2] Ein Unternehmen produziert unter Einsatz zweier Faktoren entsprechend der Produktionsfunktion $y = r_1 \cdot r_2^3$. Dabei fallen Fixkosten in Höhe von 50 Euro an. Die variablen Kosten ergeben sich aus den Faktorpreisen $p_1 = 4$ und $p_2 = 3$. Geben Sie unter der Voraussetzung, dass eine Ausbringungsmenge von $y = 64$ realisiert werden soll, die kostenminimalen Faktoreinsatzmengen r_1^* und r_2^* an. Geben Sie die notwendigen Bedingungen für ein Minimum an, bestimmen Sie damit den Kandidaten für ein Minimum und das zugehörige λ.

[3] Die tägliche Produktionsmenge eines Unternehmens sei gegeben durch $F(L, K) = L^{1/2}K^{1/2}$, wobei L die Anzahl der Arbeiter und K das investierte Kapital ist. Jeder Arbeiter erhält ein Jahresgehalt von 50 000 Euro. Die Zinsen für das investierte Kapital betragen 8% pro Jahr. Das Unternehmen hat 1 Millionen Euro für Lohn- und Zinszahlungen zur Verfügung. Finden Sie diejenigen Werte von L und K, die den Output unter der gegebenen Budgetbeschränkung maximieren. Untersuchen Sie nur die notwendigen Bedingungen und geben Sie auch den Wert von λ an.

[4] Bestimmen Sie die Lösung zu dem folgenden Maximierungsproblem einer Cobb-Douglas Funktion $\max\ 3x^{1/3}y^{2/3}$ unter der Nebenbedingung $10x + 20y = 3\,000$.

[5] Zeigen Sie, dass der Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ die notwendigen Bedingungen für das Problem max(min) $\ln x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + xy + y^2 = 3$ erfüllt. Bestimmen Sie zunächst den zugehörigen Wert des Lagrange-Multiplikators λ.

[6] Bestimmen Sie die Lösung (x^*, y^*) zu dem Problem $\max\ 5x^3y^5$ unter der Nebenbedingung $2x + \frac{1}{5}y = 8$.

[7] Bestimmen Sie den (die) Lösungskandidaten des Problems max(min) $f(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$ unter den Nebenbedingungen $g(x, y) = x^{1/3} + y^{2/3} = 8$, $x > 0$, $y > 0$, indem Sie das Problem in ein univariates Optimierungsproblem umwandeln.

[8] Bestimmen Sie die Lösung (x^*, y^*) für das Problem $\max\ 20x^{5/2} \cdot \sqrt{y}$ unter der Nebenbedingung $50x + 7y = 35$.

14.2 Interpretation des Lagrange-Multiplikators

[1] Die Produktionsfunktion $F(K, L) = 60KL$, wobei K der Kapitalinput und L der Arbeitsinput ist, soll unter der Nebenbedingung $3K + 6L = m = 120$ maximiert werden. Bestimmen Sie den Schattenpreis der Ressource m.

[2] Bei der Optimierung einer Funktion $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = c$ ergab sich die Optimalwertfunktion $f^*(c) = 3c^{4/3}$. Bestimmen Sie den von c abhängigen Wert des Lagrange-Multiplikators.

[3] Zum Kauf von x-Einheiten des Gutes A und y Einheiten des Gutes B stehen Ihnen 2 000 Geldeinheiten zur Verfügung. Der Preis pro Einheit sei 2 für Gut A und 4 für B. Der Nutzen aus dem Kauf dieser Güter sei $U(x, y) = xy$. Das Nutzenmaximierungsproblem $\max\ U(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $2x + 4y = 2\,000$ hat dann die Lösung $x^* = 500$, $y^* = 250$. Welchen approximativen Wert hat eine zusätzliche Geldeinheit für Sie, d.h. um wieviel erhöht sich der Wert der Optimalwertfunktion ungefähr, wenn die Ressource Geld sich um eine Einheit erhöht?

[4] Eine Person ziehe den Nutzen $U(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1 + 2x_2 + 2$ aus dem Kauf von x_1 Einheiten des Gutes 1 und x_2 Einheiten des Gutes 2. Der Preis pro Einheit ist 5 Euro für Gut 1 und 10 Euro für Gut 2. Die Person erhalte 1 000 Euro geschenkt mit der Bedingung, dass sie dieses Geld vollständig für den Kauf dieser beiden Güter ausgeben muss.

a) Geben Sie die Werte x_1^* und x_2^* an, die den Nutzen unter dieser Nebenbedingung maximieren. Gehen Sie davon aus, dass die notwendigen Bedingungen in diesem Fall auch hinreichend sind.

b) Geben Sie den maximalen Nutzen U^* an.

c) Um wieviele Einheiten dU^* steigt der maximale Nutzen ungefähr, wenn die Person statt 1 000 Euro 1 005 Euro erhält?

[5] Betrachten Sie das Problem $\max(\min)\ f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x + 1$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2 = a$, wobei $a > 0$. Es gibt einen Lösungskandidaten, d.h. einen Punkt (x, y), der die notwendigen Bedingungen erfüllt, für den $y = 0$ und $x > 0$ ist. Bestimmen Sie nur diesen Lösungskandidaten. Bestimmen Sie auch den zugehörigen Wert des Lagrange-Multiplikators λ. Setzen Sie voraus, dass dieser Punkt auch die hinreichenden Bedingungen für einen Optimalwert erfüllt. Bestimmen Sie dann die Ableitung der Optimalwertfunktion $f^*(a)$ nach a, d.h. $\frac{df^*(a)}{da}$.

[6] Die Produktionsfunktion $F(K, L) = 120KL$ wird unter der Nebenbedingung $2K + 5L = 120$ maximiert durch $K^* = 30$ und $L^* = 12$. Geben Sie eine Approximation des Zuwachses im Output an, wenn die Konstante in der Nebenbdingung auf 121 erhöht wird.

[7] Die Funktion $z = f(x, y)$ werde unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 8$ durch $x^* = 2$ und $y^* = 2$ maximiert. Der zugehörige Wert des Lagrange-Multiplikators sei $\lambda = 3/2$. Geben Sie die approximative Veränderung des Optimalwertes an, wenn bei der Nebenbedingung die Konstante um 25% ansteigt.

14.3 Mehrere Lösungskandidaten

[1] Die Funktion $f(x, y) = x^3 - x^2 - y^2$ soll unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 16$ maximiert bzw. minimiert werden. Bestimmen Sie alle Lösungskandidaten.

14.4 Warum die Methode der Lagrange-Multiplikatoren funktioniert

[1] Lösen sie die folgenden Probelem, indem Sie diese auf ein univariates Problem zurückführen. Zeigen Sie auch, dass Sie die Lösung gefunden haben.

a) $\max 12x\sqrt{y}$ unter $x + y = 3$, wobei $y > 0$

b) $\min x^2 + y^2$ unter $x + 2y = 4$

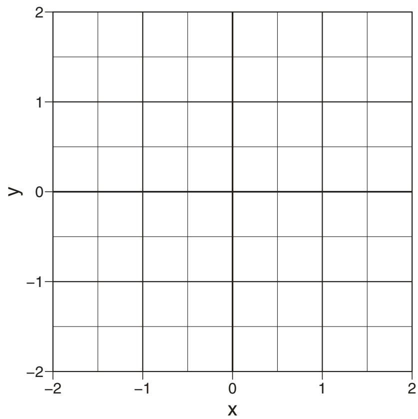
c) $\min x^2 + 2y^2$ unter $x + y = 12$

d) $\max x^2 + 3xy + y^2$ unter $x + y = 100$

14.5 Hinreichende Bedingungen

[1] Bestimmen Sie die Lösung (x^*, y^*) zu dem Problem $\min x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x + 2y = 8$. Erläutern Sie mit einem geometrischen Argument, warum Sie die Lösung gefunden haben.

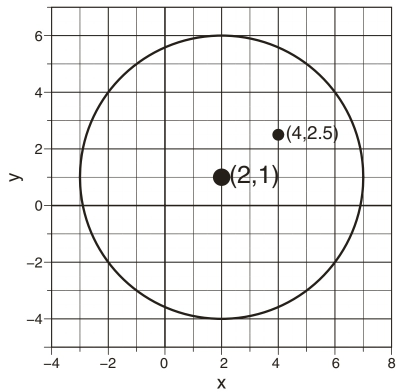
[2] Lösen Sie das Problem max(min) $x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x + y = 1$. Geben Sie auch λ an. Zeichnen Sie die zulässige Menge, d.h. die Menge der Punkte (x, y), die die Nebenbedingung erfüllen, in die folgende Graphik ein. Tragen Sie auch den Lösungspunkt (x^*, y^*) in die Graphik ein und entscheiden Sie anhand der Graphik, ob Sie das Maximum oder Minimum gefunden haben.



[3] Ist die zu dem Problem $\max 6x^{1/4}y^{1/2}$ unter der Nebenbedingung $3x + 2y = m$ gehörige Lagrange-Funktion im Bereich $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ konkav oder konvex?

[4] Gesucht wird der minimale und der maximale (quadratische) Abstand des Punktes $(x, y) = (4, 2.5)$ vom Kreis mit dem Mittelpunkt $(x, y) = (2, 1)$ und dem Radius 5, d. h. das Problem ist $\min(\max)\ (x-4)^2 + (y-2.5)^2 \quad \text{unter} \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

a) Lösen Sie die Aufgabe graphisch, indem Sie die folgenden Abbildung verwenden. Berechnen Sie die jeweiligen Optimalwerte.



b) Überprüfen Sie die gefundene Lösung mit der Lagrange-Methode. Stellen Sie zunächst die Lagrange-Funktion auf und geben Sie die notwendigen Bedingungen an. Drücken Sie den Lagrange-Multiplikator λ durch x und durch y aus. Zeigen Sie, dass die in a) gefundenen Lösungen die notwendigen Bedingungen erfüllen. Geben Sie jeweils den zugehörigen Wert des Lagrange-Multiplikators an.

c) Begründen Sie, dass Sie die globalen optimalen Punkte gefunden haben.

14.6 Mehrere Variablen und mehrere Nebenbedingungen

[1] Die Funktion $x^2 + y^2 + z^2$ besitzt unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 0$ und $2x - y + z = 14$ ein Minimum an der Stelle $(x, y, z) = (4, -5, 1)$. Bestimmen Sie die Lagrangeschen Multiplikatoren λ_1 und λ_2, wobei λ_i für $i = 1, 2$ die zur i-ten Nebenbedingung gehörigen Lagrangeschen Multiplikatoren sind.

[2] Maximieren Sie die Funktion $x + 2z$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 1$ und $y^2 + z = \frac{1}{2}$. Gehen Sie davon aus, dass die hinreichenden Bedingungen für ein Maximum erfüllt sind und berechnen Sie die Koordinaten (x^*, y^*, z^*) des Maximumpunktes sowie die Werte der Lagrange-Multiplikatoren λ_i, $i = 1, 2$.

[3] Die Zielfunktion $f(x, y, z) = x+y+z^2$ soll unter der Nebenbedingung $x^2+y^2+z^2 = 1$ optimiert werden. Bestimmen Sie alle Lösungskandidaten.

[4] Betrachten Sie das Problem max(min) $x^2 + y^2 + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 30$ und $x - y - z = 10$. Die notwendigen Bedingungen werden von genau einem Punkt (x^*, y^*, z^*) erfüllt. Bestimmen Sie diesen Punkt und die zugehörigen Werte der Lagrange-Multiplikatoren λ_1 und λ_2. Löst dieser Punkt das Maximierungs- oder Minimierungsproblem?

[5] Bestimmen Sie den Maximumpunkt von $f(x, y, z) = x^2 + x + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 16$.

[6] Bestimmen Sie den einzigen Lösungskandidaten für das Problem max(min) $x^2 + xy + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 10$ und $x = 2y$, indem Sie es auf ein zweidimensionales Optimierungsproblem mit einer Nebenbedingung vereinfachen. Dieser Kandidat löst eins der beiden Probleme. Welches Problem kann es dann nur sein?

[7] Das Optimierungsproblem max(min) $4x^2 + 2y^2 + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x + 2y + 2z = 100$ und $x - y + z = 80$ hat genau eine Lösung. Bestimmen Sie diese einschließlich der Werte der Lagrange-Multiplikatoren. Welches Problem wird gelöst, das Maximierungs- oder Minimierungsproblem?

[8] Ein Unternehmen produziert drei verschiedene Güter A, B und C. Der Gewinn aus der Produktion und dem Verkauf von x Einheiten des Gutes A, y Einheiten des Gutes B und z Einheiten des Gutes C ist $G(x, y, z) = -\frac{1}{300}x^2 + 8x - \frac{3}{125}y^2 + 48y + 24z - 5\,000$. Da alle drei Produkte auf einer Maschine gefertigt werden, liegt eine Kapazitätsbeschränkung in der folgenden Form vor: $x + 4y + 6z = 3\,300$. Bestimmen Sie den einzig möglichen Kandidaten zur Lösung dieses Problems.

14.7 Komparative Statik

[1] Ein Unternehmen benutzt K Einheiten Kapital und L Einheiten Arbeit, um $F(K, L)$ Einheiten eines Gutes herzustellen. Die Preise pro Einheit seien r und w für Kapital bzw. Arbeit. Die Kostenfunktion $C = rK + wL$ soll unter der Nebenbedingung $F(K, L) = Q$ minimiert werden. Bestimmen Sie die partielle Ableitung der Minimal-Kostenfunktion $C^*(r, w, Q)$ bezüglich Q.

[2] Betrachten Sie die Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$, d.h. die Funktion wird auf einer abgeschlossenen beschränkten Menge betrachtet und nimmt somit Maximum und Minimum an.

a) Bestimmen Sie alle Extrempunkte mit den zugehörigen Extremwerten und den zugehörigen Werten von λ.

b) Die Nebenbedingung wird geändert in $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1.02$. Geben Sie die angenäherte Änderung der Extremwerte an.

[3] Die Funktion $f(x, y, z) = e^x + y + z$ wird unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ maximiert durch $(x^*, y^*, z^*) = (1, 0, 0)$. Geben Sie die angenäherte Änderung des Maximalwertes der Zielfunktion f an, wenn die Nebenbedingungen durch $x + y + z = 1.02$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 0.98$ ersetzt werden.

[4] In einem multivariaten Optimierungsproblem mit zwei Nebenbedingungen ergibt sich im Optimum $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 15$. Die Ressourcen, d.h. die Konstanten in beiden Nebenbedingungen werden jeweils um eine Einheit erhöht. Um wieviel steigt dann ungefähr der Optimalwert der Zielfunktion?

[5] Der Nutzen durch den Kauf der Mengen x_1, x_2 bzw. x_3 der drei Güter G_1, G_2 bzw. G_3 sei gegeben durch $U(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 - 6) + 2\ln(x_2 - 5) + \ln(x_3 - 4)$. Die Kosten pro Einheit für jedes dieser drei Güter seien 1 Euro. Insgesamt haben Sie für den Kauf dieser drei Güter 36 Euro zur Verfügung, d.h. die Nutzenfunktion $U(x_1, x_2, x_3)$ soll unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 + x_3 = 36$ maximiert werden.

a) Bestimmen Sie die Mengen x_1^*, x_2^* und x_3^*, die den Nutzen maximieren. (Hinweis: Es ist möglich auch Bruchteile einer Einheit zu erwerben. Untersuchen Sie nur die notwendigen Bedingungen).

b) Um wieviel steigt der maximale Nutzen ungefähr, wenn Sie 37 Euro statt 36 Euro zur Verfügung haben?

14.8 Nichtlineare Programmierung: Ein einfacher Fall

[1] Die Funktion $x^2 - y^2 + y$ soll unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$ maximiert werden. Ermitteln Sie mit Hife der Kuhn-Tucker-Bedingungen alle möglichen Kandidaten (x^*, y^*) für die Lösung dieses Problems. Bestimmen Sie auch die zugehörigen Werte von λ.

[2] Bestimmen Sie die einzige mögliche Lösung des Problems max $5x + y$ unter der Nebenbedingung $10 \geq x^2 + y + x$.

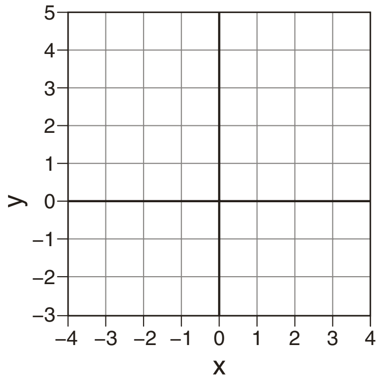
[3] Das Maximierungsproblem max $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ unter der Nebenbedingung $10x + 5y \leq 150$ hat genau eine Lösung (x^*, y^*) mit $x^* > 0$ und $y^* > 0$. Bestimmen Sie diese.

[4] Bestimmen Sie den einzig möglichen Lösungskandidaten (x^*, y^*) und das zugehörige λ für das Problem max $8x + 9y$ unter der Nebenbedingung $4x^2 + 9y^2 \leq 100$.

[5] Bestimmen Sie den einzig möglichen Lösungskandidaten für das Maximum der Funktion $f(x, y) = 4 - \frac{1}{2}x^2 - 4y$ unter der Nebenbedingung $6x - 4y \leq 12$.

14.9 Mehr über nichtlineare Programmierung

[1] Die Funktion $2x^2+2y^2-x$ soll unter den Nebenbedingungen $(x+2)^2+(y-3)^2 \leq 1$ und $\frac{3}{2}x \leq 0$ maximiert werden. Skizzieren Sie die zulässige Menge, d.h. die Menge der (x, y), die die Nebenbedingungen erfüllen.



[2] Betrachten Sie das Problem $\max\ 40a-0.02a^2+36b-0.03b^2$ unter den Nebenbedingungen $4a+3b \leq 1\,950$ und $\left(\frac{a}{30}\right)^2+\left(\frac{b}{50}\right)^2 \geq 100$. Bestimmen Sie die einzige Lösung (a^*, b^*) des Problems, wenn bekannt ist, dass der Lagrange-Multiplikator λ_1 für die erste Nebenbedingung größer als Null ist, während die zweite Ungleichung nicht bindend ist, d.h. $\left(\frac{a}{30}\right)^2+\left(\frac{b}{50}\right)^2 > 100$.

[3] Das Maximierungsproblem $\max\ f(x, y, z)$ unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) \leq 5$ und $g_2(x, y, z) \leq 10$ habe die Lösung $x^* = 4$; $y^* = 2$; $z^* = 3$; $\lambda_1 = 12$; $\lambda_2 = 36$. Um wieviel ändert sich der Maximalwert der Zielfunktion ungefähr, wenn die Konstante in der zweiten Nebenbedingung in 10.2 geändert wird.

[4] Das Problem $\max\ 2x+y-\frac{1}{3}x^3-xy-y^2$ unter den Nebenbedingungen $x \geq \frac{1}{4}$ und $x+y \leq 3$ hat genau eine Lösung (x^*, y^*), für die beide Nebenbedingungen nicht bindend sind. Bestimmen Sie die Lösung.

[5] Die Funktion $f(x, y, z) = x^2+x+y^2+z^2$ hat unter der Nebenbedingung $x^2+2y^2+2z^2 \leq 16$ einen eindeutig bestimmten Minimumpunkt, der im Innern der zulässigen Menge liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten (x^*, y^*, z^*) dieses Minimumpunktes.

[6] Betrachten Sie das nichtlineare Programmierungsproblem $\min\,(x-3)^2+(y-3)^2$ unter der Nebenbedingung $\frac{1}{4}x+y \geq 10$ und der Nichtnegativitätsbedingung $x \geq 0$. Schreiben Sie die notwendigen Kuhn-Tucker-Bedingungen in der in (14.9.4 - 5) gegebenen Form und bestimmen Sie dann alle Lösungskandidaten mit dem zugehörigen Wert von λ.

[7] Bestimmen Sie den einzigen Lösungskandidaten (einschließlich der Werte der Lagrange-Multiplikatoren λ_1 und λ_2) des Problems

$$\max \ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}y \quad \text{unter den Nebenbedingungen} \left\{ \begin{array}{r} x \leq 5 \\ -x + y \leq 1 \end{array} \right. \qquad x \geq 0, y \geq 0$$

[8] Das nichtlineare Optimierungsproblem $\max \ xy - y - z^2$ unter $x + y^2 + z^2 \leq 2$ und $x \geq 0$ hat genau eine Lösung. Bestimmen Sie zunächst alle Lösungskandidaten mit den zugehörigen Werten von λ, indem Sie eine geeignete Fallunterscheidung verwenden. Entscheiden Sie dann, welcher Kandidat das Problem löst.

Matrizen und Vektoralgebra

15

ÜBERBLICK