WWW.PEARSON-STUDIUM.DE
CWS
COMPANION WEBSITE

che
chemie

Wolfgang Pavel
Ralf Winkler

Mathematik für Naturwissenschaftler

PEARSON
Studium

Wolfgang Pavel
Ralf Winkler

Mathematik für Naturwissenschaftler

PEARSON Studium

ein Imprint von Pearson Education
München • Boston • San Francisco • Harlow, England
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City
Madrid • Amsterdam

Vektoren

5

ÜBERBLICK

Dieses Kapitel erklärt:

- Was man unter einem Vektor versteht und wie man diesen geometrisch deutet.
- Rechenoperationen für Vektoren sowie Eigenschaften, die Vektoren dadurch verliehen werden.
- Den Begriff der linearen (Un-)Abhängigkeit und eine Analyse endlich vieler Vektoren auf diese Eigenschaft.
- Wie lineare Unterräume von Vektoren aufgespannt werden sowie den Begriff einer Basis dieser Unterräume.
- Den formalen Bezug von Vektoren zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

„Bei vielen Größen, die in den Naturwissenschaften auftreten, handelt es sich um Skalare, d. h. um einfache „Zahlen“. Dazu zählen beispielsweise Zeit, Temperatur, Stoffmenge usw. Dem gegenüber stehen Größen, die etwa durch ihre Lage, ihre Orientierung oder ihre Ausdehnung einen räumlichen Bezug aufweisen. Kräfte, die an einem Körper angreifen, oder Positionsangaben im Raum fallen in diese Kategorie, bei deren Beschreibung es mit der Angabe einer einzigen Zahl nicht getan ist. Davon motiviert führen wir in diesem Abschnit den Begriff des Vektors ein.“

5.1 Der geometrische Vektorbegriff

Bei unserer hauptsächlich geometrisch motivierten Einführung des Vektorbegriffs wollen wir zwischen **Orts**- und **Richtungsvektoren** unterscheiden. In beiden Fällen sei ein kartesisches (rechtwinkliges) Koordinatensystem zugrunde gelegt. Für die folgenden Überlegungen beschränken wir uns auf die Ebene, wohl wissend, dass sich die geometrischen Sachverhalte auch auf den dreidimensionalen Raum übertragen lassen.

Unter einem **Ortsvektor**

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

können wir uns einen Pfeil vorstellen, welcher ortsfest im Nullpunkt $(0, 0)$ des Koordinatensystems entspringt und dessen Pfeilspitze auf den Punkt $P = (a, b)$ zeigt. In diesem Sinne kann der Punkt $P = (a, b)$ der Ebene mit dem zugehörigen Pfeil identifiziert werden. ▶ Abbildung 5.1 zeigt beispielsweise den Ortsvektor

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

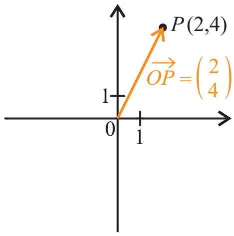

Abbildung 5.1: Ortsvektor.

Auch unter einem **Richtungsvektor**

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

wollen wir einen gerichteten Pfeil verstehen, der einem Punkt entspringt und dessen Spitze auf einen weiteren Punkt zeigt. Die absolute Position dieses Pfeils ist dabei jedoch nicht von Belang. Einzig relevant ist, wie man vom Ausgangspunkt zur Pfeilspitze gelangt: An einem beliebigen Ausgangspunkt startend, müssen wir a Einheiten parallel zur ersten Koordinatenachse marschieren, bevor wir uns b Einheiten in Richtung der zweiten Koordinatenachse zu bewegen haben. Der Pfeil repräsentiert also ein Objekt, welches in der Ebene frei parallel verschiebbar ist und dennoch stets denselben Vektor darstellt. In ▶ Abbildung 5.2 ist somit ein einziges mathematisches Gebilde dargestellt, nämlich der Richtungsvektor

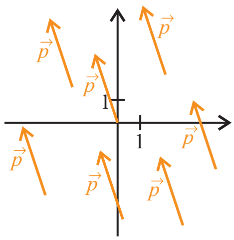

Abbildung 5.2: Jeweils der gleiche Richtungsvektor.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Im nächsten Schritt wollen wir einen Vektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{zu einem zweiten Vektor} \qquad \vec{q} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

addieren. ▶ Abbildung 5.3 zeigt exemplarisch am Beispiel zweier Richtungsvektoren, wie wir uns dies geometrisch vorzustellen haben, nämlich als „Anheften“ eines Vektors an einen anderen:

Eine Bewegung um 5 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach oben, gefolgt von weiteren 2 Einheiten nach rechts und 4 Einheiten nach oben bringt uns von einem Ausgangspunkt zur Pfeilspitze. Insgesamt haben wir uns damit in horizontale Richtung um $5+2=7$ Einheiten nach rechts und in vertikale Richtung um $1+4=5$ Einheiten nach oben bewegt, was insgesamt dem Vektor

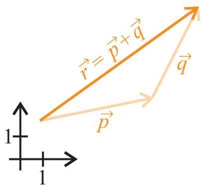

Abbildung 5.3: Vektoraddition.

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$

entspricht. In diesem Sinne spricht man von der **Addition** zweier Vektoren und notiert diese durch

$$\vec{r}=\vec{p}+\vec{q}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}.$$

Die Berechnung des Summenvektors wird also dadurch bewerkstelligt, dass die einzelnen Komponenten der beiden beteiligten Vektoren addiert werden.

Neben der Addition von Vektoren wollen wir im Folgenden die **Vervielfachung** von Vektoren erklären.

Betrachten wir etwa den Richtungsvektor

$$\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

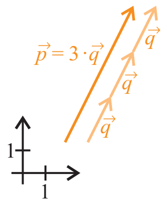

Abbildung 5.4: Vervielfachung von Vektoren.

Der Vektor

$$\vec{p}=3\cdot\vec{q}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

entspreche nun demjenigen Vektor, welcher dieselbe Richtung wie $\vec{q}$ besitzt, gegenüber diesem jedoch um den Faktor 3 verlängert werden soll. ▶ Abbildung 5.4 zeigt, dass der so verlängerte Vektor gegeben ist durch

$$\vec{p}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}.$$

Die Komponenten von $\vec{q}$ wurden also einzeln jeweils mit dem Faktor 3 multipliziert.

Interessant ist es zu beobachten, was mit einem gegebenen Vektor $\vec{q}$ geschieht, wenn wir ihn mit einer **negativen** Zahl multiplizieren. Nach dem eben Gezeigten würden wir beispielsweise rechnen

$$\vec{p} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} .$$

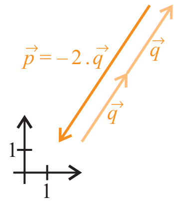

Abbildung 5.5: Vervielfachung durch negative Zahlen.

▶ Abbildung 5.5 zeigt, was dabei passiert: Neben einer Streckung des Ausgangsvektors um den Faktor 2 erhalten wir $\vec{p}$, indem wir zusätzlich noch die **Orientierung** des ursprünglichen Vektors umkehren.

Die eben beschriebenen Vektoroperationen Addition und Vervielfachung sind dabei nicht auf Richtungsvektoren beschränkt. Geometrisch vernünftig ist auch die Vervielfachung von Ortsvektoren bzw. die Addition eines Richtungsvektors an einen Ortsvektor.

Im Zusammenhang mit Vektoren haben sich im Lauf der Zeit zahlreiche Schreibweisen eingebürgert. Beispielsweise sind

$$\overline{p}, \quad \underline{p}, \quad \boldsymbol{p}$$

alternative Schreibweisen für den Vektor $\vec{p}$. Handelt es sich um einen Ortsvektor, so ist auch die Notation

$$\overrightarrow{OP}$$

verbreitet. Wir werden in diesem Buch hauptsächlich die Pfeilschreibweise $\vec{p}$ gebrauchen. Zudem wollen wir zukünftig eine Unterscheidung in Orts- und Richtungsvektoren nur noch dort vornehmen, wo sie geometrisch geboten erscheint.

Abstraktion des Vektorbegriffs 5.2

Wir wollen im Folgenden den Vektorbegriff in zweierlei Hinsicht verallgemeinern. Zum einen wollen wir die strikte Trennung zwischen Orts- und Richtungsvektoren auflösen, zumal die Gesetze der Addition und Vervielfachung für beide Klassen (und zwischen ihnen) dieselben sind. Zum anderen wollen wir den Begriff des Vektors aus der Ebene oder dem dreidimensionalen Raum heraus verallgemeinern. Beides lässt sich abstrakt, aber vergleichweise einfach bewerkstelligen: Wir erklären das Objekt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit den $\boldsymbol{n}$ **Komponenten** $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ als einen $\boldsymbol{n}$**-dimensionalen reellen Vektor**. Für $n \geq 4$ verliert dieses Objekt zwar seinen geometrischen Bezug, doch kommt es uns hier nur auf die formalen Vektoroperationen an. Wir erklären die Addition zweier n-dimensionaler Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ durch

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} . \tag{5.1}$$

Wie im Spezialfall $n = 2$ weiter oben veranschaulicht, werden bei der Vektoraddition die einzelnen Komponenten addiert. Entsprechend erklären wir in Analogie zum anschaulichen ebenen oder dreidimensionalen Fall allgemein die Vervielfachung eines n-dimensionalen Vektors mit einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ durch

$$c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix} . \tag{5.2}$$

Was die Subtraktion zweier Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ betrifft, so lässt sich diese (rein formal) zu

$$\vec{p} - \vec{q} := \vec{p} + (-1)\vec{q}$$

einführen. Wir subtrahieren also $\vec{q}$ von $\vec{p}$, indem wir den mit (-1) multiplizierten Vektor $\vec{q}$ nach obigem Schema (5.1) an $\vec{p}$ heranaddieren. Es ist klar, dass damit auch die Subtraktion pragmatisch komponentenweise berechnet werden kann, d. h.

$$\vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} .$$

Die Gesamtheit aller n-dimensionalen Vektoren bildet zusammen mit den so definierten Rechenoperationen einen **Vektorraum**, den wir als $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. Als Spezialfälle sind uns vor allem die Zahlengerade $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, die Ebene $\mathbb{R}^2$ sowie der dreidimensionale Raum $\mathbb{R}^3$ bereits begegnet bzw. bekannt.

Für die in (5.1) und (5.2) beschriebenen Operationen lassen sich unmittelbar die folgenden Rechengesetze verifizieren, die wir stillschweigend des Öfteren benutzen werden.

Satz **Rechengesetze**

Es seien $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $(\vec{p} + \vec{q}) + \vec{r} = \vec{p} + (\vec{q} + \vec{r})$ (**Assoziativgesetz**)
b) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$ (**Kommutativgesetz**)
c) $c \cdot (\vec{q} + \vec{p}) = c \cdot \vec{q} + c \cdot \vec{p}$ (**Distributivgesetz**)

Beispielsweise besagt das Assoziativgesetz a), dass die Addition dreier Vektoren beliebig gruppiert vorgenommen werden kann. Auch die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle, was gerade der Aussage b) entspricht. Beides wird zum einen durch die Definition von Addition und Vervielfachung in (5.1) und (5.2) deutlich; zum anderen decken sich diese Gesetze mit der geometrischen Anschauung im $\mathbb{R}^2$ oder im $\mathbb{R}^3$.

Wichtige prominente Vertreter von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind die so genannten **kanonischen Einheitsvektoren** (die Bezeichnung sowie wesentliche Eigenschaften werden wir in den kommenden Abschnitten erörtern):

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine wesentliche Rolle spielt auch der **Nullvektor**

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrag und Skalarprodukt 5.3

5.3.1 Die Länge eines Vektors

Aus der anschaulichen Interpretation eines Vektors als einen gerichteten Pfeil ergibt sich auch die Möglichkeit, diesem eine **Länge** oder einen **Betrag** zuzuordnen.

Betrachten wir den Vektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

in ▶ Abbildung 5.6. Wie wir mit Hilfe des dort dargestellten rechtwinkligen Dreiecks erkennen, ist seine Länge $|\vec{p}|$ nach dem Satz des Pythagoras gegeben durch

$$|\vec{p}| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

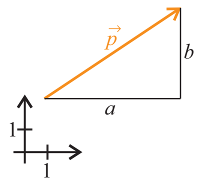

Abbildung 5.6: Länge oder Betrag eines Vektors.

Wieder wollen wir dies auf Vektoren des $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern: Wir definieren den Betrag, die Länge oder die euklidische **Norm** eines Vektors

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

durch die Zahl

$$|\vec{x}| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,. \tag{5.3}$$

Definitionsgemäß ist der Betrag eines Vektors somit immer größer oder gleich null. Nur im Fall $\vec{x} = \vec{0}$ nimmt der Betrag den Wert Null an. Darüber hinaus gilt für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, dass

$$|c \cdot \vec{v}| = |c| \cdot |\vec{v}|\,, \tag{5.4}$$

was sich aus der kurzen Rechnung

$$|c \cdot \vec{v}| = \sqrt{(cv_1)^2 + \ldots + (cv_n)^2} = \sqrt{c^2(v_1^2 + \ldots + v_n^2)} = |c| \cdot |\vec{v}|$$

ergibt.

Beispiel 5.1

Es sei der Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Seinen Betrag berechnen wir gemäß (5.3) zu

$$|\vec{x}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 9 + 9 + 25} = \sqrt{47} .$$

Dividieren wir einen Vektor $\vec{x}$ der Länge $l = |\vec{x}|$ durch seine eigene Länge, so besitzt der durch $|\vec{x}|$ dividierte Vektor

$$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nach (5.4) die Länge 1. Ein solcher Vektor wird auch als **Einheitsvektor** oder als ein **auf die Länge 1 normierter** Vektor bezeichnet.

Beispiel 5.2

Gegeben sei der Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Seine Länge ist

$$|\vec{x}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 .$$

Damit ist der Vektor

$$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

ein Einheitsvektor des $\mathbb{R}^2$.

5.3.2 Das Skalarprodukt

Unter dem (kanonischen, euklidischen) **Skalarprodukt** zweier Vektoren des $\mathbb{R}^n$ verstehen wir die Operation, welche zwei Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

eine reelle Zahl zuordnet und durch

$$\vec{x} \bullet \vec{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \tag{5.5}$$

definiert ist. Auch die Bezeichnung „inneres Produkt" ist hier geläufig. Das $\bullet$-Zeichen wird bisweilen auch durch ein schlichtes $\cdot$ ersetzt. Man halte sich aber in jedem Fall stets vor Augen, dass durch (5.5) eine neue Art der Multiplikation definiert wird. Das Ergebnis dieser Skalarmultiplikation ist eine reelle Zahl, ein Skalar (daher der Name). Mit der bereits bekannten Vervielfachung von Vektoren hat dies nichts zu tun.

Beispiel 5.3

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

Damit ist

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-4) + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 6 = 3 - 2 - 6 + 0 = -5 .$$

Wir stellen einige wichtige Eigenschaften und Rechengesetze rund um das Skalarprodukt zusammen.