

Jetzt mit  
eLearning

# *besser  
lernen*

# Experimentalphysik 1

Mechanik und Wärme

Martin Erdmann  
Günter Flügge

# Experimentalphysik 1

Mechanik und Wärme

Martin Erdmann  
Günter Flügge

## Das Wichtigste zum Mitnehmen

### Zum Mitnehmen: Koordinatensysteme 1

- Ein Ortsvektor  $\vec{b}$  wird in **kartesischen Koordinaten** beschrieben durch

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

Die **Basis-** oder **Einheitsvektoren** entlang der Achsen des kartesischen Koordinatensystems  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  bilden ein **rechtshändiges orthogonales Dreibein**.

Mit dem räumlichen Linienelement

$$d\vec{s} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz \quad (9.55)$$

lassen sich die Geschwindigkeit  $\vec{v} = d\vec{s}/dt$  und die Beschleunigung  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  definieren.

- Zwischen den **zylindrischen Koordinaten**  $r, \varphi, z$  (Spezialfall  $z = 0$ : **Polarkoordinaten**) und den Komponenten eines Vektors  $\vec{b}$  im kartesischen System besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} b_x &= r \cos(\varphi) \\ b_y &= r \sin(\varphi) \\ b_z &= z. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Auch die Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  bilden ein rechtshändiges orthogonales Dreibein.

Mit dem räumlichen Linienelement

$$d\vec{s} = dr \vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z \quad (9.22)$$

lassen sich wieder  $\vec{v} = d\vec{s}/dt$  und  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  beschreiben.

Das Flächenelement auf den Zylinderdeckeln ( $z = \text{const.}$ ) ist

$$dA = r dr d\varphi. \quad (9.26)$$

Das Flächenelement auf dem Zylindermantel ist

$$dA = r \cdot d\varphi dz. \quad (9.28)$$

Das Volumenelement ist

$$dV = r dr d\varphi dz. \quad (9.31)$$

### Zum Mitnehmen: Koordinatensysteme 2

- Zwischen den **Kugelkoordinaten** (auch: sphärische Koordinaten) mit dem Radius  $r$ , dem Azimutwinkel  $\varphi$ , und dem Polarwinkel  $\vartheta$  bezüglich  $\vec{e}_z$  und den kartesischen Komponenten eines Vektors  $\vec{b}$  besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} b_x &= r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ b_y &= r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ b_z &= r \cos(\vartheta) . \end{aligned} \quad (9.36)$$

Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$  bilden ebenfalls ein rechtshändiges orthogonales Dreibein.

Mit dem räumlichen Linienelement

$$d\vec{s} = dr \vec{e}_r + r d\vartheta \vec{e}_\vartheta + r \sin(\vartheta) d\varphi \vec{e}_\varphi \quad (9.41)$$

lassen sich die Geschwindigkeit  $\vec{v} = d\vec{s}/dt$  und die (recht komplizierte) Beschleunigung  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  beschreiben.

Das Flächenelement ist

$$dA = r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi . \quad (9.47)$$

Das Volumenelement ist

$$dV = r^2 dr \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi . \quad (9.50)$$

- Der **Gradient grad** ist definiert als ein Vektor aus den partiellen Ableitungen in die drei Koordinatenrichtungen (Komponenten der Linienelemente  $d\vec{s}$  (9.55) (9.22) (9.41)):

$$\text{grad} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (9.13)$$

Der Gradient in Zylinderkoordinaten lautet

$$\text{grad} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} . \quad (9.33)$$

Der Gradient in Kugelkoordinaten lautet

$$\text{grad} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (9.52)$$

# Gravitationswechselwirkung nach Newton

10

<b>10.1</b>	<b>Gravitationskraft</b> . . . . .	<b>175</b>
10.1.1	Messung der Gravitationskonstanten . . . . .	178
<b>10.2</b>	<b>Gravitationspotential</b> . . . . .	<b>185</b>
10.2.1	Potentielle Energie . . . . .	185
10.2.2	Potential . . . . .	187
10.2.3	Zusammenhang zwischen Kraft und Potential . . . . .	188
10.2.4	Äquipotentialflächen . . . . .	189
<b>10.3</b>	<b>Energie eines Himmelskörpers</b> . . . . .	<b>189</b>
10.3.1	Potentielle Energie . . . . .	190
10.3.2	Kinetische Energie . . . . .	190
10.3.3	Gesamtenergie . . . . .	192
<b>10.4</b>	<b>Bahnkurven von Himmelskörpern</b> . . . . .	<b>192</b>
10.4.1	Radiale Bewegung im Zentralpotential . . . . .	193
10.4.2	Kegelschnitte . . . . .	194
10.4.3	Berechnung der Bahnkurven . . . . .	198
10.4.4	Bindungszustände und Streuprozesse . . . . .	200
<b>10.5</b>	<b>Historischer Bezug</b> . . . . .	<b>203</b>
10.5.1	Meilensteine . . . . .	203
10.5.2	Kepler-Gesetze . . . . .	203

ÜBERBLICK

» Gravitation bezeichnet die Anziehung zwischen massebehafteten Körpern und gehört zu den fundamentalen Wechselwirkungen der Natur. In Form der Erdanziehung ist sie eine unmittelbare physikalische Lebenserfahrung für uns.

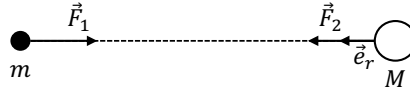
Im größeren Zusammenhang basieren die Planetenbewegungen unseres Sonnensystem auf Gravitationswechselwirkung. Auch die Sterne unserer Milchstraße sind durch Gravitation gebunden. Schließlich ist die Entstehungsgeschichte von Galaxien, Sternen und Planeten unseres Universums in wesentlichen Aspekten eine Folge der Gravitation.

In diesem Kapitel stellen wir Newtons Gravitationsgesetz vor. Wir berechnen einerseits die Bahnkurven der Planeten, die durch Gravitation im Sonnensystem gebunden sind. Andererseits zeigen wir für sich frei bewegende Himmelskörper, dass ihre Flugrichtungen durch Streuprozesse an anderen Himmelskörpern aufgrund der Gravitationswechselwirkung verändert werden.



## 10.1 Gravitationskraft

Zwischen zwei massebehafteten Körpern  $M$  und  $m$  wirkt eine anziehende Kraft, die Gravitationskraft (► Abbildung 10.1).



**Abbildung 10.1** Zwei Massen ( $M$ ) und ( $m$ ) ziehen sich aufgrund der entgegengesetzt gleichen Gravitationskräfte  $F_1$  und  $F_2$  gegenseitig an.

In folgendem Kraftgesetz von Newton ist die Anziehungskraft der Massen formuliert:

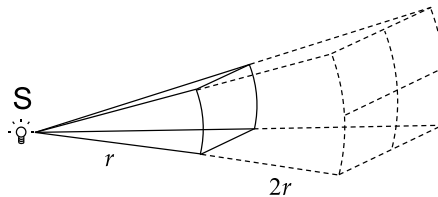
$$\vec{F} = -G \frac{m M}{r^2} \vec{e}_r \quad (10.1)$$

Dabei sind die Kräfte auf die jeweilige Masse entgegengesetzt gerichtet und gleich groß:  $\vec{F} = \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ . Die verschiedenen Terme werden wir im Folgenden motivieren.

Stellen wir uns eine punktförmige Quelle der Intensität  $I_o$  vor (z. B. eine Lampe), die gleichmäßig in alle Richtungen strahlt (► Abbildung 10.2). Im Abstand  $r$  verteilt sich die Intensität ihres Lichts auf die Kugeloberfläche  $4\pi r^2$ . Auf einer Einheitsfläche im Abstand  $r$  ist die registrierte Intensität der Quelle deswegen um folgenden geometrischen Faktor geringer:

$$I \propto I_o \frac{1}{r^2} \quad (10.2)$$

Für Punktquellen entsteht demnach durch Geometrie eine Abnahme der Intensität mit dem Quadrat des Abstands zur Quelle.



**Abbildung 10.2** Verdeutlichung der  $1/r^2$ -Abhängigkeit der Gravitationskraft

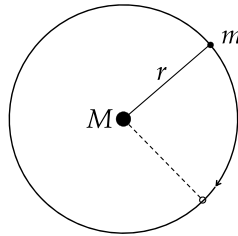
Mit dieser Überlegung haben die verschiedenen Terme der Gravitationskraft (10.1) folgende Bedeutungen:

$F \propto \frac{1}{r^2}$	Die Kraft ist aus geometrischem Grund abnehmend,
$\vec{F} \propto \vec{e}_r$	sie wirkt entlang der Verbindungsachse,
$F \propto mM$	sie steigt mit der Größe der involvierten Massen,
$F < 0$	sie entspricht der Vorzeichenkonvention für anziehende Kräfte.

Der Parameter  $G$  ist eine wichtige Größe der Physik und heißt **Gravitationskonstante**.  $G$  hat den Wert [9]

$$G = (6,67430 \pm 0,00015) \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}. \quad (10.3)$$

Die Gravitationskraft ist eine **Zentralkraft**, da sie geometrisch nur vom Abstand  $r$  der beiden massebehafteten Körper abhängt. Denkt man sich eine Kugelschale um die Masse  $M$  und verschiebt die Masse  $m$  auf dieser Kugeloberfläche, bleibt die Gravitationskraft zwischen den beiden Massen gleich groß (► Abbildung 10.3).



**Abbildung 10.3** Die Gravitationskraft zwischen den Massen  $M$  und  $m$  ist auf einer Kugelschale um  $M$  für  $m$  konstant.

Wenn man die Masse  $m$  von der anderen Masse  $M$  entfernt, ist die dabei geleistete Arbeit nur vom Abstand  $r$  zwischen den beiden Massen abhängig und unabhängig vom exakten Weg. Die Gravitationskraft ist somit eine **konservative Kraft**.

Befindet man sich in Erdnähe ( $h \ll R_{\text{Erde}}$ ), können wir näherungsweise alle Werte zusammenfassen, die sich nicht ( $G, M$ ) oder kaum ( $r = R_{\text{Erde}} + h \approx R_{\text{Erde}}$ ) verändern. Aus (10.1) ergibt sich dann

$$g \equiv \frac{G \cdot M_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}^2} \quad (10.4)$$

$$= \frac{6,67430 \cdot 10^{-11} \cdot 5,977 \cdot 10^{24}}{(6371)^2} \cdot \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{km}^2} \quad (10.5)$$

$$\approx 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (10.6)$$

Auf der Erde kann man also in guter Approximation mit

$$\vec{F} = -\frac{G M_{\text{Erde}} m}{R_{\text{Erde}}^2} \vec{e}_r = -m \vec{g} \quad (10.7)$$

rechnen. Aufgrund der Erdabplattung und unterschiedlicher Masseverteilungen, Höhen und Zentrifugalkräfte variiert der Wert der Erdbeschleunigung regional zwischen  $\approx 9,83 \text{ m/s}^2$  an den Polen und  $\approx 9,78 \text{ m/s}^2$  am Äquator. Der mittlere Wert in Deutschland beträgt  $\approx 9,81 \text{ m/s}^2$ .



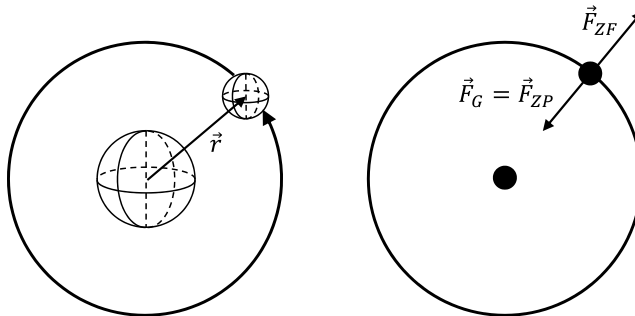
**Aufgabe 26: Astronaut auf dem Mond**

Wie viel stärker ist die Erdbeschleunigung  $g$  als die »Mondbeschleunigung«  $g'$ ?  
Verwenden Sie die folgenden Größen:

$$M_{\text{Mond}} = 7 \cdot 10^{22} \text{ kg}, \quad R_{\text{Mond}} = 1800 \text{ km}, \quad G = 7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

**Aufgabe 27: Schaukel auf der Sonne**

Auf einer (abgekühlten) Sonne soll eine Schaukel mit der Pendellänge  $L$  installiert werden. Die Schwingungsperiode beträgt somit  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$  (4.87). Verwenden Sie  $L = 1 \text{ m}$ ,  $M_{\text{Sonne}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ,  $R_{\text{Sonne}} = 700\,000 \text{ km}$ ,  $g = GM/R^2$  und  $G = 7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ , um die Schwingungsperiode auf der Sonne zu berechnen. Vergleichen Sie die Schwingungsperiode auf der Sonne mit der Schwingungsperiode auf der Erde.

**Abbildung 10.4**

Der Mond umkreist die Erde im Abstand  $r$ . Die Gravitationskraft  $\vec{F}_G$  entspricht dabei der zur Kreisbewegung gehörenden Zentripetalkraft  $\vec{F}_{ZP}$  (und steht der Zentrifugalkraft  $\vec{F}_{ZF}$  entgegen).

**Beispiel 28: Mondbewegung, Erdmasse**

Die Gravitationskraft  $\vec{F}_G$  (10.1) hält das System aus Erde und Mond zusammen (► Abbildung 10.4). Eine Kollision der beiden Himmelskörper wird nur deswegen verhindert, weil der Mond um die Erde kreist. Die Kreisbewegung impliziert die Existenz einer Zentripetalkraft  $\vec{F}_{ZP} = -m_M \omega^2 \vec{r}$  (4.21), die radial und entgegengesetzt zur Zentrifugalkraft  $\vec{F}_{ZF}$  steht.

Gravitationskraft  $\vec{F}_G$  und Zentripetalkraft  $\vec{F}_{ZP}$  entsprechen dabei einander:

$$\vec{F}_{ZP} = \vec{F}_G \quad (10.8)$$

$$-m_M r \omega^2 \vec{e}_r = -\frac{G M_E m_M}{r^2} \vec{e}_r \quad (10.9)$$

Die Kreisfrequenz  $\omega$  des Mondes können wir in die Umlaufzeit  $T$  des Mondes umschreiben  $T = 2\pi/\omega$  (4.11) und erhalten

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{G M_E}{r^3} \quad (10.10)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M_E}}. \quad (10.11)$$

Die Umlaufzeit steigt also etwas stärker als linear mit dem Abstand ( $r^{3/2}$ ).

Mit Kenntnis der Mondumlaufzeit  $T = 27$  Tage können wir mit (10.11) eine Bestimmung der Erdmasse  $M_E$  durchführen. Mit dem Abstand zwischen Mond und Erde von  $|\vec{r}| = 400\,000$  km und der Gravitationskonstanten  $G \approx 7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  beträgt die Erdmasse

$$M_E = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} \approx \frac{4\pi^2 (4 \cdot 10^8)^3}{7 \cdot 10^{-11} (27 \cdot 9 \cdot 10^4)^2} \cdot \frac{\text{m}^3}{\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \text{s}^2} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}. \quad (10.12)$$

Der korrekte Wert ist  $M = 5,97219 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  [10].

## 10.1.1 Messung der Gravitationskonstanten

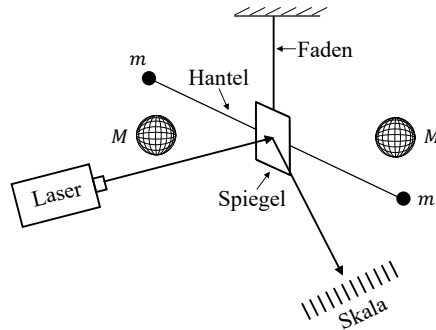
Mit der sogenannten Gravitationswaage führen wir einen Versuch durch, bei dem wir Massen aufgrund der Gravitationskraft beschleunigen. Aus ihrer beschleunigten Bewegung können wir die Gravitationskonstante  $G$  (10.3) bestimmen.

### Versuchsaufbau

Eine Hantel mit zwei kleinen Massen  $m$  an ihren Enden ist an einem Faden aufgehängt (► Abbildung 10.5). Kleine Drehungen der Hantel können über einen Spiegel mithilfe eines Laserstrahls sichtbar gemacht werden.

Auf gleicher Höhe wie die beiden kleinen Massen befinden sich zwei große Massen  $M$ . Wegen der  $1/r^2$ -Abhängigkeit der Gravitationskraft  $\vec{F}_G$  (10.1) wirkt  $\vec{F}_G$  in guter Näherung nur zwischen den jeweils benachbarten Massen  $M$  und  $m$ .

Entscheidend für die Versuchsdurchführung ist, dass die beiden großen Massen  $M$  entweder von der einen oder von der anderen Seite auf die kleinen Massen  $m$  wirken (► Abbildungen 10.6). Durch den Wechsel wird die am Faden hängende Hantel gedreht. Dabei wirken zwei Drehmomente auf die Hantel.



**Abbildung 10.5** Gravitationswaage: 2 bewegliche Testmassen  $m$  werden von 2 großen festen Massen  $M$  angezogen. Die Bewegung wird über einen mitbewegten Spiegel gemessen, der einen Laserstrahl auf eine Skala reflektiert.

### Drehmoment durch Gravitation

Die Gravitationskraft wirkt jeweils zwischen den beiden Massen  $m$  und  $M$ , die sich im Abstand  $r$  voneinander befinden und die beide den Abstand  $\vec{R}$  von der Drehachse haben. Der Einheitsvektor  $\vec{e}_r$  zeigt horizontal vom Zentrum der großen Masse zum Zentrum der kleinen Masse. Das gesamte Drehmoment auf die Hantel der kleinen Massen, das durch die Gravitationskraft zwischen den Kugeln verursacht wird, lautet (linke ► Abbildung 10.6)

$$\vec{D}_G = 2\vec{R} \times \vec{F}_G \quad (10.13)$$

$$= -2\vec{R} \times \frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r. \quad (10.14)$$

Der Faktor 2 berücksichtigt die Drehmomente beider Kugelpaare. Der resultierende Drehimpulsvektor  $\vec{D}_G$  steht immer parallel oder antiparallel zum Faden.

### Drehmoment durch Torsion

Die Torsion (Verdrehung) des Fadens, an dem die Hantel mit den kleinen Massen aufgehängt ist, bewirkt ein rücktreibendes Drehmoment entlang des Fadens. Für kleine Auslenkungen ist es proportional zum Drehwinkel  $\alpha$ :

$$\vec{D}_T = -D_F \alpha \vec{e}_F \quad (10.15)$$

In der Ausgangsstellung des Versuchs (linke ► Abbildung 10.6) zeigt der Einheitsvektor  $\vec{e}_F$  entlang des Fadens nach oben. Das sogenannte Richtmoment  $D_F$  charakterisiert die Steifigkeit des Fadens und kann für kleine Winkel  $\alpha$  als konstant angenommen werden.

### Drehimpuls der Hantel

Zu Beginn des Versuchs (linke ► Abbildung 10.6) wirkt die Gravitationskraft so, dass sich die Hantel mit den kleinen Massen  $m$  gegen den Uhrzeigersinn den beiden großen Massen  $M$  entgegendreht. Da aber die Torsion des Fadens der Drehung entgegenwirkt, bleibt die Hantel irgendwann stehen.

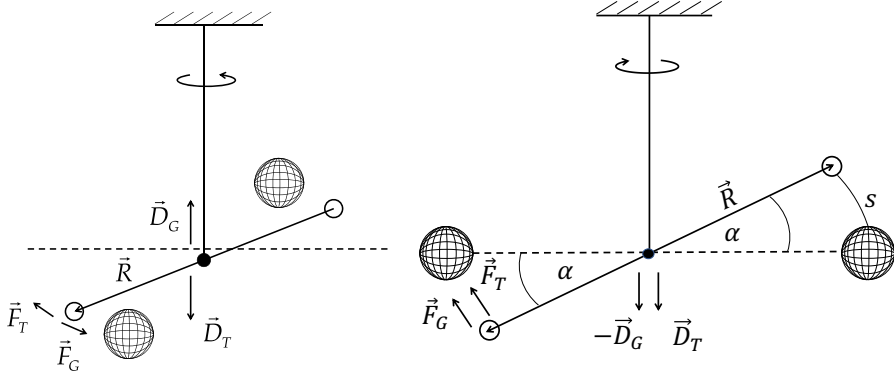


Abbildung 10.6

Links: In der Ausgangsposition heben sich die Kräfte der Gravitationsanziehung und der Torsion der Hantel mit den Testmassen sowie die zugehörigen Drehmomente  $\vec{D}_G = -\vec{D}_T$  gerade auf. Rechts: In der Endposition werden die schweren Massen  $M$  auf die andere Seite der Testmassen geschwenkt. Die gleich großen Drehmomente  $-\vec{D}_G = \vec{D}_T$  wirken jetzt beide im Uhrzeigersinn.

Solche Drehbewegungen der Hantel können wir mit ihrem Drehimpuls  $\vec{L}_H$  (4.52) beschreiben. Nach dem Bewegungsgesetz für Drehbewegungen (4.70) verursachen die beiden äußeren Drehmomente  $\vec{D}_G$  (10.14) und  $\vec{D}_T$  (10.15) die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $\vec{L}_H$ :

$$\frac{d\vec{L}_H}{dt} = \sum_{i=1}^2 \vec{D}_i = \underbrace{\vec{D}_T}_{\text{Torsion}} + \underbrace{\vec{D}_G}_{\text{Gravitation}} \quad (10.16)$$

Der Drehimpuls der Hantel auf der linken Seite

$$\vec{L}_H = \vec{R} \times \vec{p} \quad (10.17)$$

zeigt ebenfalls je nach Bewegungsrichtung entlang des Fadens oder entgegengesetzt zum Faden. Den Drehimpulsbetrag und seine zeitliche Änderung drücken wir – wie beim Drehmoment der Torsion  $\vec{D}_T$  (10.15) – über den Drehwinkel  $\alpha$  aus. Dafür verwenden wir den Bogenweg  $s = R\alpha$  (4.4) und seine zeitliche Ableitung  $v = ds/dt = R d\alpha/dt$ :

$$L_H = 2mRv = 2mR^2 \frac{d\alpha}{dt} \quad (10.18)$$

$$\frac{d\vec{L}_H}{dt} = 2mR^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (10.19)$$

### Startposition

Für die Ausgangsstellung des Versuchs wird ein Ruhezustand erreicht, wenn sich die Drehmomente aus Gravitation und Torsion ausgleichen. Dann verschwindet der Hanteldrehimpuls  $\vec{L}_H = 0$ . Die Drehmomente  $\vec{D}_G$  und  $\vec{D}_T$  stehen dabei antiparallel (linke ► Abbildung 10.6) und haben denselben Betrag:

$$|\vec{D}_G| = |\vec{D}_T| \quad (10.20)$$

# Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwort- und DRM-Schutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: **info@pearson.de**

## Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten oder ein Zugangscode zu einer eLearning Plattform bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.** Zugangscodes können Sie darüberhinaus auf unserer Website käuflich erwerben.

## Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

**<https://www.pearson-studium.de>**